SỔ TAY
TOÁN LỚP 9

Clevai Math

SACHHOC.COM

Tổng hợp kiến thức

từ cơ bản đến nâng cao

Cuốn sổ của em:...

Lớp:...

Trường:..

CleverMath

Chuyên đề

Căn bậc hai. Căn bậc ba

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hàm số bậc nhất

Hàm số y = ax^2 (a$\neq$ 0). Phương trình bậc hai một ẩn

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Góc với đường tròn

Đường tròn

Hình trụ
Hình nón
Hình cầu

Căn bậc hai. Căn bậc ba

Hàm số bậc nhất

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

CleverMath

Đường tròn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Phương trình bậc hai một ẩn

Góc với đường tròn

Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

Căn bậc hai.

Căn bậc ba

$$\sqrt{4}$$

$$\sqrt[3]{27}$$

CleverMath

Căn bậc hai

Kiến thức cần nhớ:

- Với số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là **căn bậc hai số học** của a. Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- Với $a \geq 0$, ta có:

  Nếu $x = \sqrt{a}$ thì $x \geq 0$ và $x^2 = a$

  Nếu $x \geq 0$ và $x^2 = a$ thì $x = \sqrt{a}$
- Với hai số a và b không âm, ta có

  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

Bài mẫu:

Tìm số x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 12$;   b) $\sqrt{x} < 5$

Bài giải:

a) Ta có $x = 12^2 = 144$

b) $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$

Vận dụng:

1. Tìm số x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{3}$;

b) $\sqrt{5x} < 10$

2. So sánh (không dùng máy tính bỏ túi):

a) $2\sqrt{31}$ và 10;

b) 2 và $\sqrt{2} + 1$

Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Kiến thức cần nhớ:

- Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là **căn thức bậc hai** của A.
- $\sqrt{A}$ chỉ có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$
- $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

Bài mẫu:

Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$$

Bài giải:

Ta có: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

$$= \sqrt{9 + 2 \,.\, 3 \,.\, \sqrt{2} + 2} - 3 + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - 3 + \sqrt{2}$$

$$= |3 + \sqrt{2}| - 3 + \sqrt{2}$$

$$= 3 + \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Vận dụng:

1. Rút gọn biểu thức: $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

2. Tìm x để căn thức sau có nghĩa: $\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$

CleverMath

Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

Kiến thức cần nhớ:

- Khai phương một tích: $\sqrt{A\,.\,B} = \sqrt{A}\,.\,\sqrt{B}$ $(A \geq 0, B \geq 0)$
- Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A}\,.\,\sqrt{B} = \sqrt{A\,.\,B}$ $(A \geq 0, B \geq 0)$

Bài mẫu:

Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2})\,\sqrt{2}$

Bài giải:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

$= \sqrt{4\,.\,3} + 2\sqrt{9\,.\,3} + 3\sqrt{25\,.\,3} - 9\sqrt{16\,.\,3}$

$= \sqrt{4}\,.\,\sqrt{3} + 2\,.\,\sqrt{9}\,.\,\sqrt{3} + 3\,.\,\sqrt{25}\,.\,\sqrt{3} - 9\,.\,\sqrt{16}\,.\,\sqrt{3}$

$= 2\,.\,\sqrt{3} + 6\,.\,\sqrt{3} + 5\,.\,\sqrt{3} - 36\,.\,\sqrt{3}$

$= -23\sqrt{3}$

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2})\,\sqrt{2}$

$= (\sqrt{4}\,.\,\sqrt{2} + \sqrt{36}\,.\,\sqrt{2} - \sqrt{2})\,\sqrt{2}$

$= (2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2})\,\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}$

$= 14$

Vận dụng:

Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt{252} + \sqrt{20} - 4\sqrt{63}$

b) $2\sqrt{3}\,(\sqrt{12} + 2\sqrt{48} - \sqrt{192})$

Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

Kiến thức cần nhớ:

- Khai phương một thương: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

  $(A \geq 0, B \geq 0)$

- Chia hai căn bậc hai: $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$

  $(A \geq 0, B \geq 0)$

Bài mẫu:

Tìm x thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 1$

Bài giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

Ta có: $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} = 1$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = x - 1$

$\Leftrightarrow x = 2$ (tmđk)

Vận dụng:

Tìm x thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{2}$

Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai

Kiến thức cần nhớ:

- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:
  Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có
  $\sqrt{A^2.B} = |A| . \sqrt{B}$, tức là:
  Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$
  Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$
- Phép đưa thừa số vào trong căn:
  Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$
  Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$
- Khử mẫu của biểu thức lấy căn:
  Với các biểu thức A, B mà $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$,
  ta có: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A.B}}{|B|}$
- Trục căn thức ở mẫu:
  Với $B > 0$, ta có: $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$
  Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có: $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp B\right)}{A \pm B^2}$
  Với $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:
  $$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A \pm B}$$

Bài mẫu:

Rút gọn biểu thức:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

Bài giải:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}+\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{25-5}+\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}{25-5}$$

$$=\frac{25+10\sqrt{5}+5}{20}+\frac{25-10\sqrt{5}+5}{20}$$

$$=\frac{60}{20}=3$$

Vận dụng:

Rút gọn biểu thức:

$$\frac{\sqrt{7}-5}{2}-\frac{6-2\sqrt{7}}{4}+\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{5}{4+\sqrt{7}}$$

CleverMath

Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Kiến thức cần nhớ:

Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện các phép biến đổi đơn giản:

1) Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn

2) Đưa một thừa số vào trong dấu căn

3) Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn

4) Trục căn thức ở mẫu

Bước 2: Thực hiện phép tính

Bài mẫu:

Cho biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

a) Rút gọn P nếu $x \geq 0;\ x \neq 4$

b) Tìm x để P = 2.

Bài giải:

a) ĐKXĐ: $x \geq 0;\ x \neq 4$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

b) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow\ x = 16$ (tm).

Vận dụng:

Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{3x-3}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$$

a) Rút gọn Q nếu $x \geq 0; x \neq 9$

b) Tìm x để $Q < \frac{-1}{2}$.

Căn bậc ba

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$
- Mỗi số a đều có duy nhất môt căn bậc ba
- $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$
- $\sqrt[3]{A.B} = \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$
- Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

Bài mẫu:

Thực hiện phép tính sau:

$$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)$$

Bài giải:

$$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)$$

$$= \left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

Vận dụng:

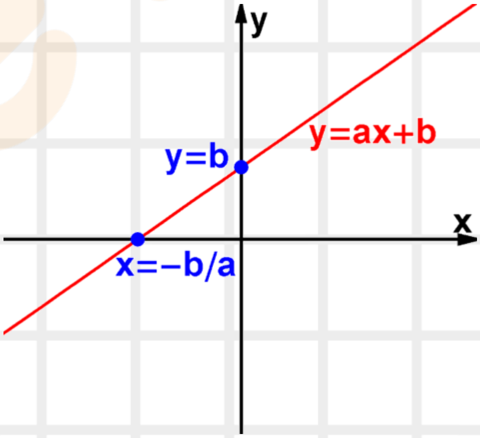
Thực hiện phép tính sau:

$$\sqrt[3]{-46} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$$

Hàm số

bậc nhất

$$y = ax + b$$
$$(a \neq 0)$$



Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

Kiến thức cần nhớ:

1. Khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x, x được gọi là biến số.

  Ta viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, . . .

- Giá trị của $f(x)$ tại x_o kí hiệu là $f(x_o)$.
- Tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.
- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

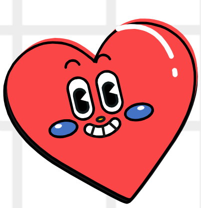
2. Đồ thị hàm số

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x; f(x)) trên mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số y = f(x).

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số y = f(x) xác định với mọi giá trị của x thuộc R. Với x_1, x_2 bất kì thuộc R:

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số y = f(x) **đồng biến** trên R.
- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số y = f(x) **nghịch biến** trên R.



Bài mẫu:

Cho hàm số $y = f(x) = 4 - \frac{2}{5}x$ với $x \in R$.

a) Tính f(-1)

b) Chứng minh rằng hàm số nghịch biến trên R

Bài giải:

a) $f(-1) = 4 - \frac{2}{5}(-1) = 4 + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$

b) Với x_1, x_2 bất kì thuộc R, ta có:

$$f(x_1) = 4 - \frac{2}{5}x_1 \text{ ; } f(x_2) = 4 - \frac{2}{5}x_2$$

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0$ và ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(4 - \frac{2}{5}x_1\right) - \left(4 - \frac{2}{5}x_2\right)$$

$$= -\frac{2}{5}(x_1 - x_2) > 0$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên R.

CleverMath

Vận dụng:

1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x + 5$ với $x \in R$.

a) Tính f(3)

b) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên R.

2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

Tìm tập xác định của hàm số.

Hàm số bậc nhất

Kiến thức cần nhớ:

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ với $a \neq 0$.
- Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi x thuộc R và có tính chất: Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên R, nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên R.

Bài mẫu:

Cho hàm số $y = (m + 1)x + 5$. Tìm các giá trị của m để hàm số:

a) Đồng biến ; b) Nghịch biến

Bài giải:

a) Hàm số đồng biến khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

b) Hàm số nghịch biến khi $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Vận dụng:

Cho hàm số $y = (2m - 1)x - 3$. Tìm các giá trị của m để hàm số:

a) Đồng biến ;

b) Nghịch biến

CleverMath

Đồ thị hàm số
$y = ax + b\ (a \neq 0)$

Kiến thức cần nhớ:

- Đồ thị hàm số $y = ax + b \quad (a \neq 0)$ là một đường thẳng:

  + Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b

  + Song song với đường thẳng $y = ax$, nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

- Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b \quad (a \neq 0)$

Bước 1:

+ Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $P(0; b)$ thuộc trục tung Oy.

+ Cho $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

Bước 2:

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$.

Bài mẫu:

Cho hàm số $y = (m - 2)x + 1$.

a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$

b) Tìm m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$

Bài giải:

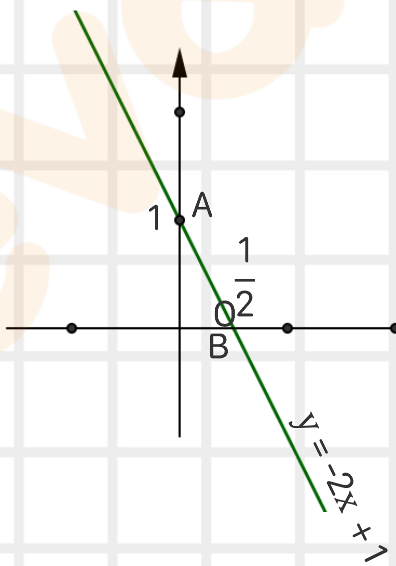
a) Với $m = 0$ ta có: $y = -2x + 1$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$, ta có điểm $A(0; 1)$

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, ta có điểm $B(\frac{1}{2}; 0)$

Đường thẳng qua A, B là đồ thị của hàm số:

$y = -2x + 1$.



b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$

$\Rightarrow 2 = (m - 2) . 1 + 1$

$\Leftrightarrow m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3.$

Vận dụng:

Cho hàm số $y = -mx + 2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = -1$

b) Tìm m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $B(-3; 5)$.

CleverMath

Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Kiến thức cần nhớ:

- Hai đường thẳng $y = ax + b \quad (a \neq 0)$ và $y = a'x + b' \quad (a' \neq 0)$ song song với nhau khi và chỉ khi $a = a', b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a', b = b'$.
- Hai đường thẳng $y = ax + b \quad (a \neq 0)$ và $y = a'x + b' \quad (a' \neq 0)$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

CleverMath

Bài mẫu:

Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx - 2$ và

$y = (2m + 3)x + 1$

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau;

b) Hai đường thẳng cắt nhau

Bài giải:

a) Ta có $-2 \neq 1$ nên để đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song thì:

$m = 2m + 3 \Leftrightarrow m = -3$

b) Vì $-2 \neq 1$ nên để đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau thì:

$m \neq 2m + 3 \Leftrightarrow m \neq -3$

Vận dụng:

Cho hai hàm số bậc nhất $y = (m + 1)x - 5$ và $y = (2 - m)x + 7$

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau;

b) Hai đường thẳng cắt nhau

CleverMath

Hệ số góc của đường thẳng

$y = ax + b \ (a \neq 0)$

Kiến thức cần nhớ:

- Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a.
- Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Bài mẫu:

Cho hàm số $y = ax + 5$

a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; -2)

b) Vẽ đồ thị của hàm số và xác định góc tạo bởi đường thẳng đó và trục Ox (làm tròn đến phút).

Bài giải:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1; -2)

$\Rightarrow -2 = a \,.\, 1 + 5 \Leftrightarrow a = -7$

Vậy hệ số góc a = -7.

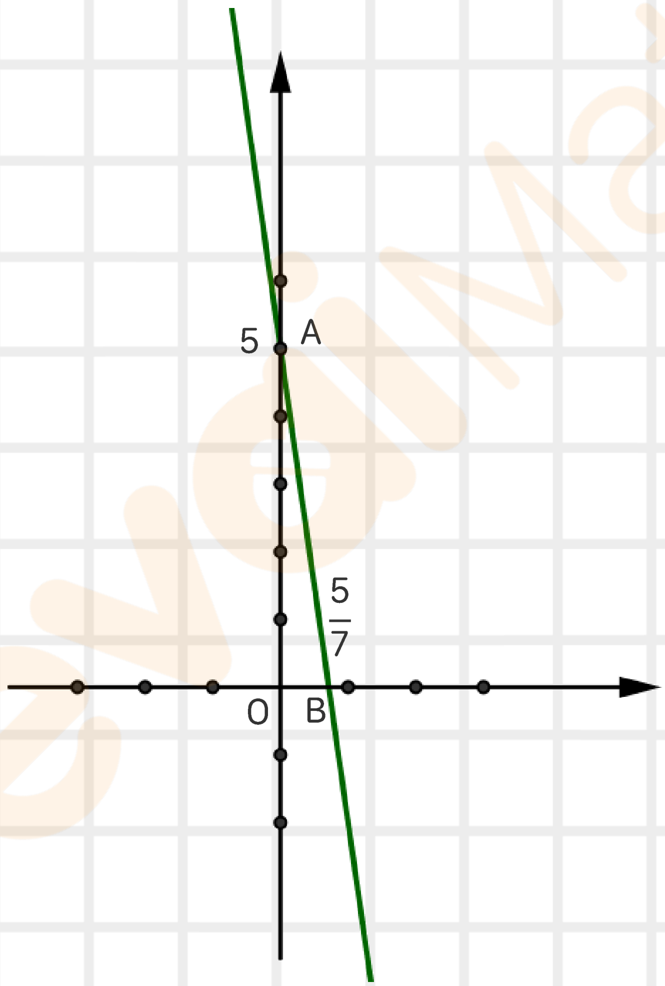
b) Hàm số $y = -7x + 5$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 5$, ta có điểm A(0; 5)

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$, ta có điểm B($\frac{5}{7}$; 0)

Đường thẳng qua A, B là đồ thị của hàm số:

$y = -7x + 5$.



+ Ta gọi góc giữa đường thẳng $y = -7x + 5$ và trục Ox là α.

Vậy $\widehat{ABO} = \alpha$.

Xét tam giác vuông OAB, ta có $tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{\frac{5}{7}} = 7$

$\Rightarrow \alpha \approx 81^o 52'$

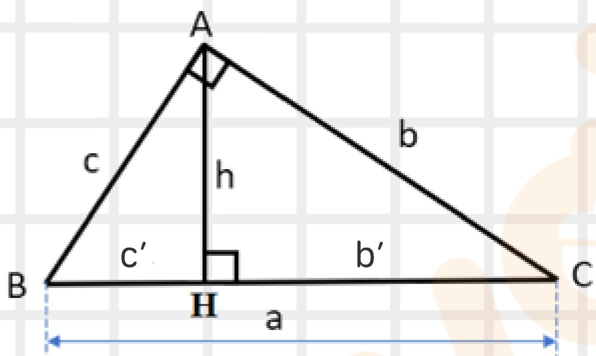
Vận dụng:

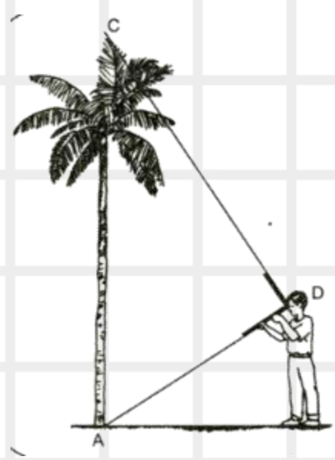
Cho hàm số $y = ax - 1$

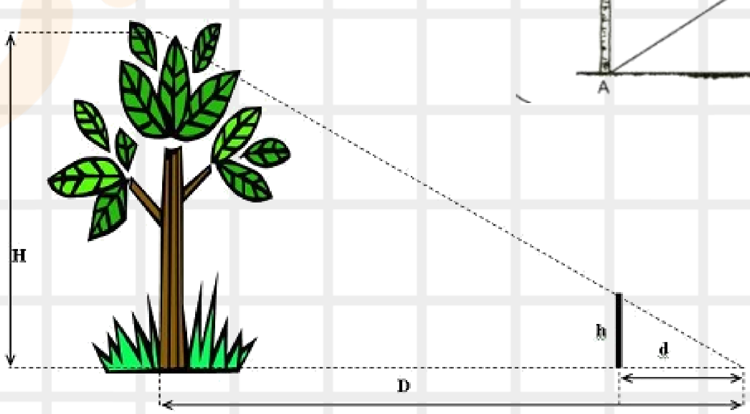
a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm D(-3; 2)

b) Vẽ đồ thị của hàm số và xác định góc tạo bởi đường thẳng đó và trục Ox (làm tròn đến phút).

Hệ thức lượng trong tam giác vuông



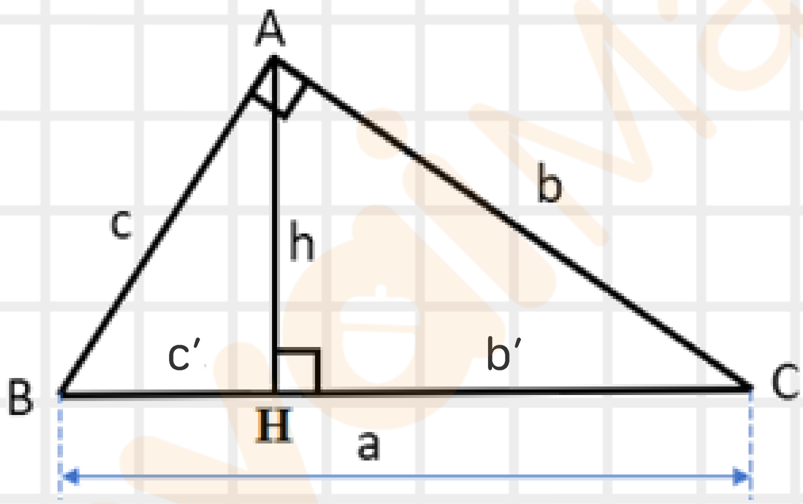




CleverMath

Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Kiến thức cần nhớ:



$b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$

$h^2 = b'c'$

$bc = ah$

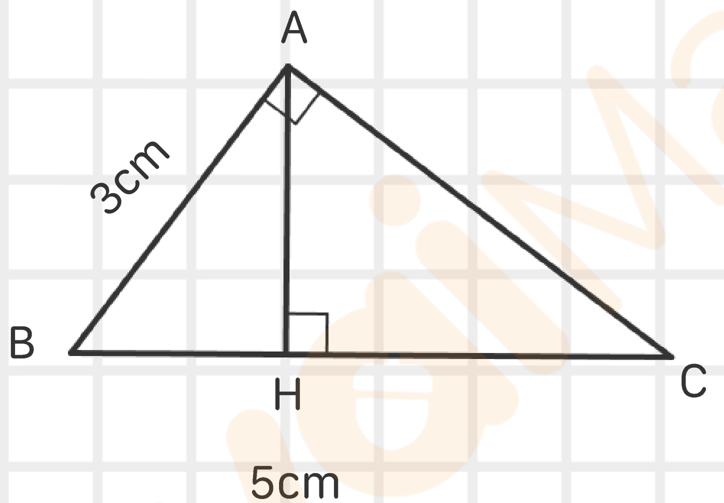
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Bài mẫu:

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm. AH là đường cao.

Tính BH, CH, AC và AH

Bài giải:



Ta có $AB^2 = BC \,.\, BH$

$\Rightarrow BH = AB^2 : BC = 9 : 5 = 1,8$ (cm)

$\Rightarrow CH = BC - BH = 5 - 1,8 = 3,2$ (cm)

Ta có $AC^2 = BC \,.\, CH = 5 \,.\, 3,2 = 16$ (cm)

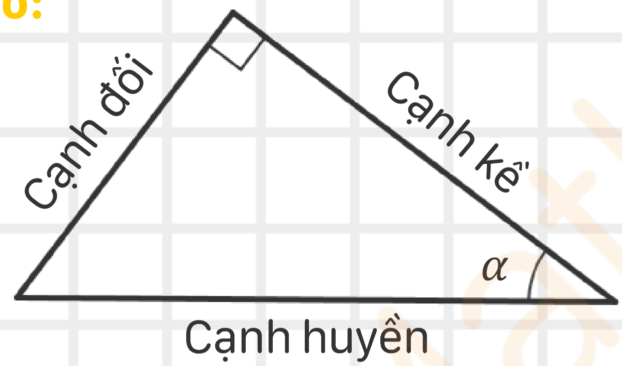
$AH^2 = BH \,.\, HC = 1,8 \,.\, 3,2 = 5,76$ (cm)

Vận dụng:

Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10cm, AB = 8cm. AH là đường cao. Tính BC, BH, CH, AH.

Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Kiến thức cần nhớ:



- Tỉ số lượng giác của một góc nhọn:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} \quad ; \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.
- Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

Tỉ số \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

- Một số hệ thức lượng giác:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \text{tg}\alpha \,.\, \text{cotg}\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

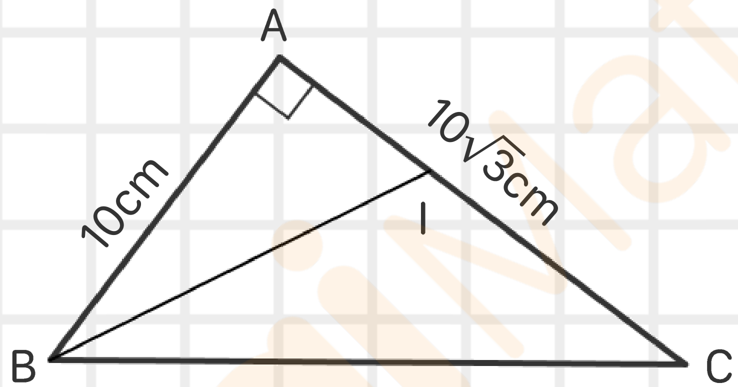
Bài mẫu:

Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = $10\sqrt{3}$cm.

a) Tính góc B.

b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI

Bài giải:



a) Ta có $tg\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^o$

b)

Do $\widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow \widehat{ABI} = 30^o$ (Vì BI là phân giác góc B)

$\Rightarrow tg\widehat{ABI} = tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác $tg\widehat{ABI} = \frac{AI}{AB}$

$\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow AI = \frac{\sqrt{3}}{3}.AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.10 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Chú ý: Ta có thể tính AI bằng cách khác:

Do BI là phân giác góc B nên ta có tỉ số:

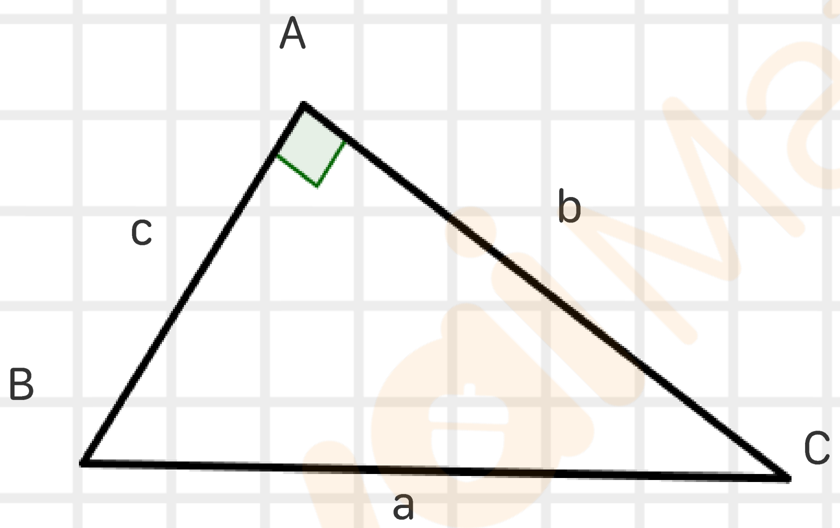
$$\frac{AI}{AB} = \frac{CI}{BC} = \frac{AI + CI}{AB + BC}$$

Vận dụng:

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 64cm và CH = 81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Kiến thức cần nhớ:



Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, AB = c. Ta có:

b = a . sinB = a . cosC ; c = a . sinC = a . cosB

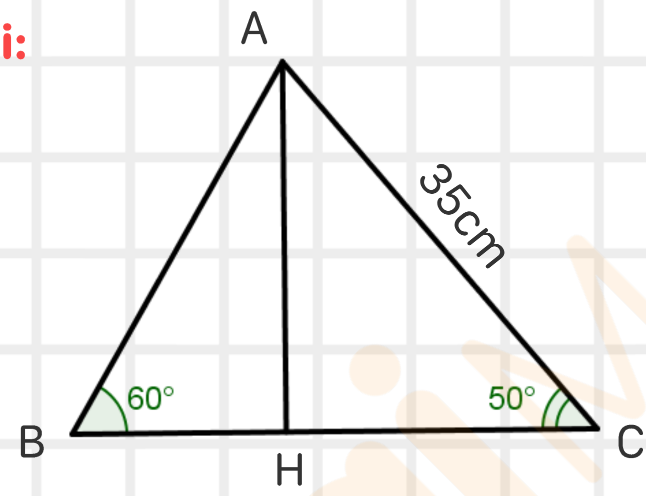
b = c . tgB = c . cotgC ; c = b . tgC = b .cotgB

Bài mẫu:

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 50^o$, AC = 35cm.

Tính diện tích tam giác ABC.

Bài giải:



Kẻ đường cao AH

Xét tam giác AHC vuông tại H.

Ta có:

$AH = AC . \sin C = 35 . \sin 50^o \approx 26,81$ (cm)

$HC = AC . \cos C = 35 . \cos 50^o \approx 22,5$ (cm)

$HB = AH . \cot g B \approx 26,81 . \cot g 60^o \approx 15,48$ (cm)

Suy ra $BC = HB + HC \approx 22,5 + 15,48 = 37,98$ (cm)

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH . BC \approx \frac{1}{2} . 26,81 . 37,98$$

$$= 509,12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vận dụng:

Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, $\widehat{C} = 40^o$,

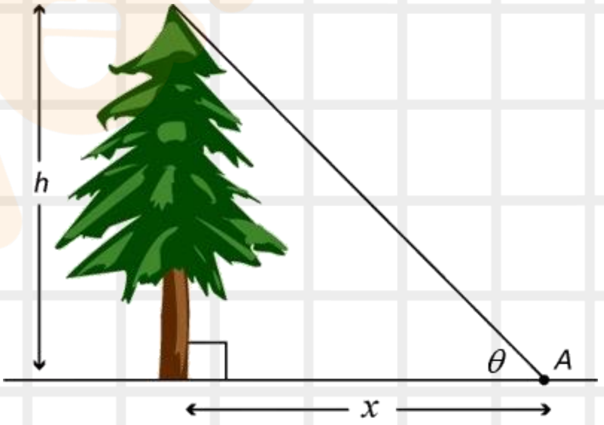
AB = 4cm, AD = 3cm. Tính diện tích tứ giác ABCD.

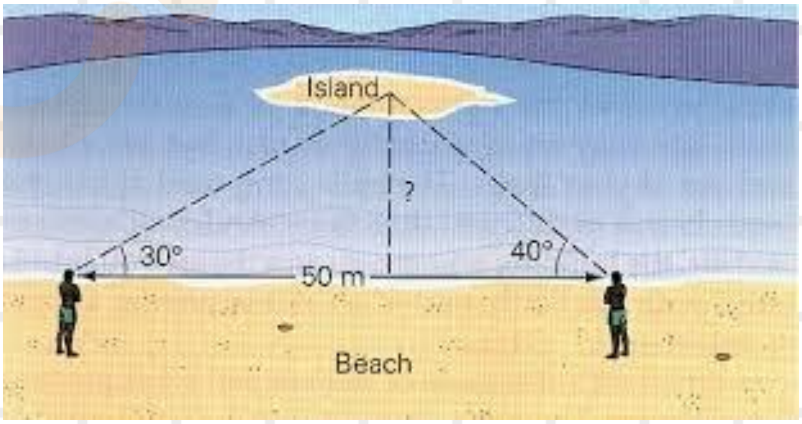
CleverMath

Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn. Thực hành ngoài trời

Kiến thức cần nhớ:

Nhờ vào tỉ số lượng giác của góc nhọn, ta có thể tính được chiều cao của tháp, tòa nhà, . . . và khoảng cách giữa hai điểm mà ta không thể đo trực tiếp được.

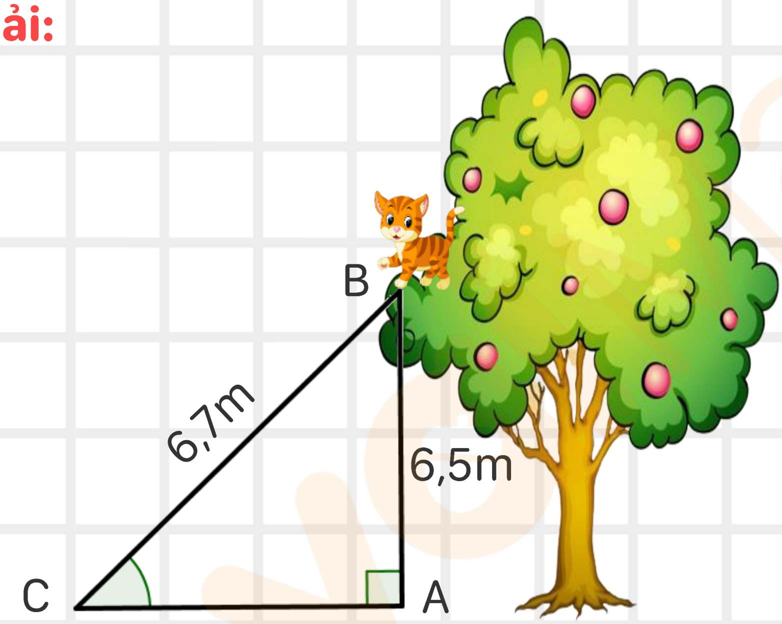




Bài mẫu:

Một con mèo ở trên cành cây cao 6,5m. Để bắt mèo xuống cần phải đặt thang sao cho đầu thang đạt độ cao đó, khi đó góc của thang với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài 6,7m?

Bài giải:



Giả sử khoảng cách từ con mèo đến mặt đất là AB, thang tương ứng với đoạn BC.

Ta có: $\tan C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6,5}{6,7} = \dfrac{65}{67}$

$\Rightarrow \widehat{C} \approx 44^o$

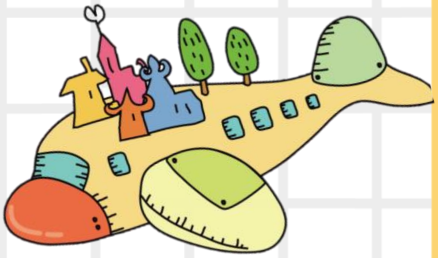
Vậy góc của thang với mặt đất có số đo gần bằng 44^o.

Vận dụng:

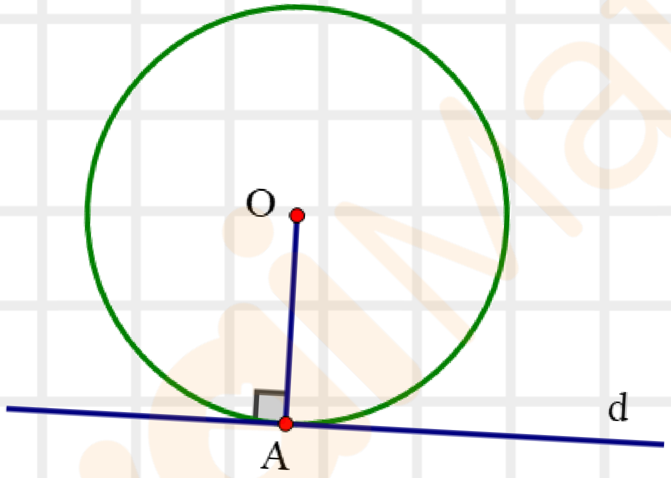
Một máy bay đang bay ở độ cao 10km. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

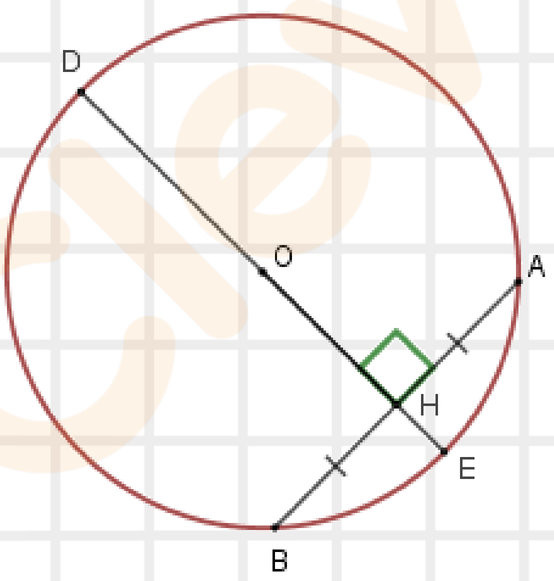
a) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 3^o thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh?

b) Nếu cách sân bay 300km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu?



Đường tròn



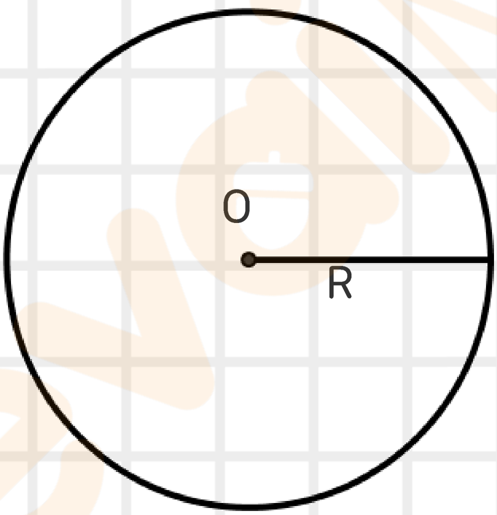


CleverMath

Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

Kiến thức cần nhớ:

1. Đường tròn O bán kính R (R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.



2. Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn.

Cho đường tròn (O; R) và điểm M.

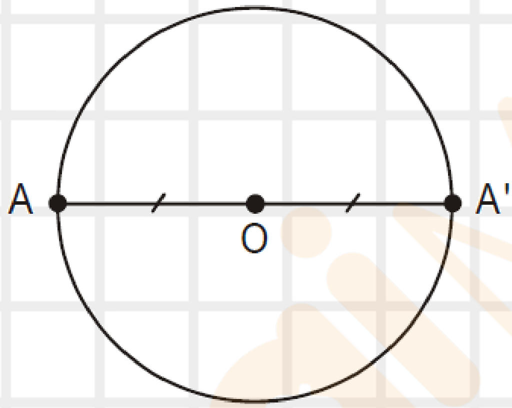
- M nằm trên đường tròn (O; R) $\Leftrightarrow$ OM = R
- M nằm trong đường tròn (O; R) $\Leftrightarrow$ OM < R
- M nằm ngoài đường tròn (O; R) $\Leftrightarrow$ OM > R.

3. Cách xác định đường tròn.

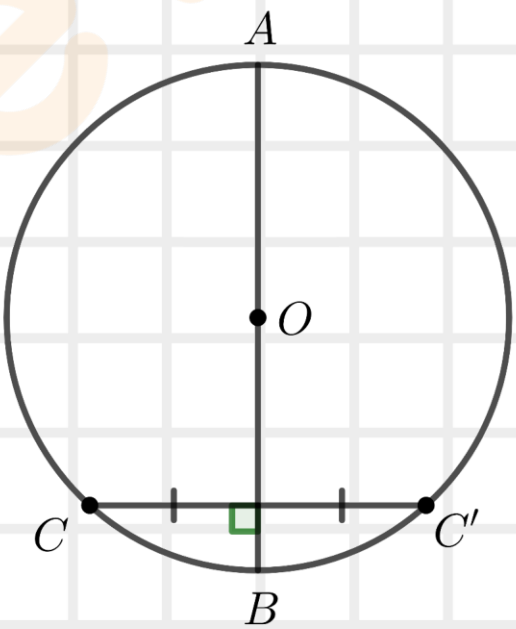
Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.



- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



Bài mẫu:

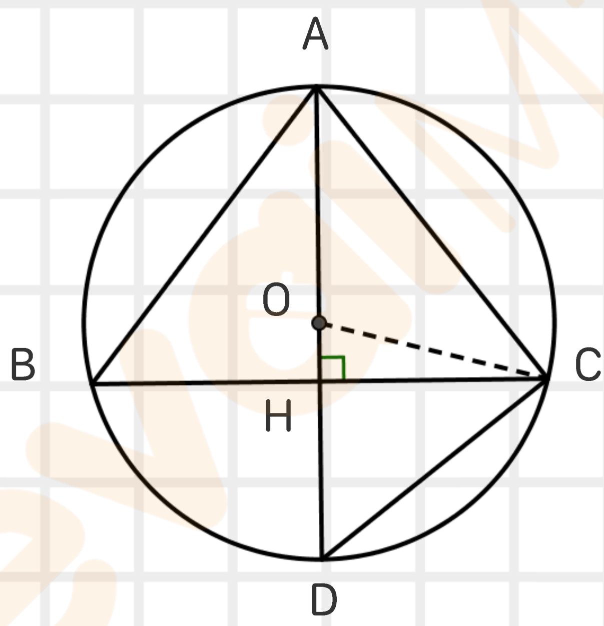
Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở D.

a) Vì sao AD là đường kính của đường tròn (O)?

b) Tính số đo góc ACD

c) Cho BC = 24cm, AC = 20cm. Tính đường cao AH và bán kính đường tròn (O)

Bài giải:



a) Tam giác ABC cân tại A nên AH là đường trung trực của BC. Do đó AD là đường trung trực của BC.

Vì O nằm trên đường trung trực của BC nên O nằm trên AD.

Vậy AD là đường kính của đường tròn (O).

b) Ta có OC là đường trung tuyến tại đỉnh C của tam giác ACD

Lại có OC = OA = OD (Vì đều bằng bán kính của đường tròn)

Suy ra tam giác ACD vuông tại C.

Vậy $\widehat{ACD} = 90^o$

c) Ta có $BH = HC = \dfrac{BC}{2} = 12$ (cm)

Tam giác AHC vuông tại H nên

$AH^2 = AC^2 - HC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$

$\Rightarrow AH = 16$ (cm)

Ta có $AC^2 = AD \,.\, AH$

$\Rightarrow AD = \dfrac{AC^2}{AH} = \dfrac{20 \,.\, 20}{16} = 25$ (cm)

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn (O) bằng:

25 : 2 = 12,5 (cm).

Vận dụng:

Cho tam giác đều ABC cạnh 3cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường kính và dây của đường tròn

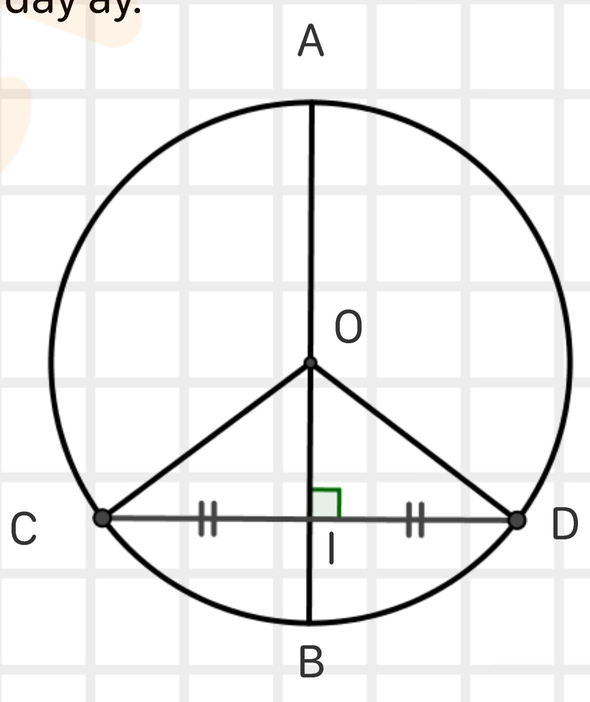
Kiến thức cần nhớ:

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

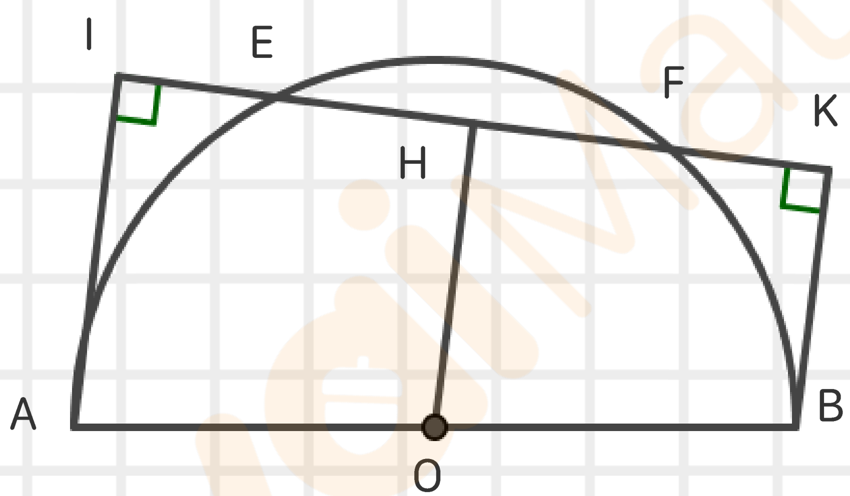
- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



Bài mẫu:

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và dây EF không cắt đường kính. Gọi I và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến EF. Chứng minh rằng IE = KF.

Bài giải:



Kẻ OH ⊥ EF.

Hình thang AIKB có:

AO = OB

OH // AI // BK (OH, AI, BK cùng vuông góc với EF)

Suy ra HI = HK (1)

Vì OH là phần đường kính vuông góc với dây EF nên HE = HF (2)

Từ (1) và (2) suy ra IE = KF.

Vận dụng:

Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử IA = 2cm. IB = 4cm. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

CleverMath

Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Kiến thức cần nhớ:

- Trong một đường tròn:

+) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm

+) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn

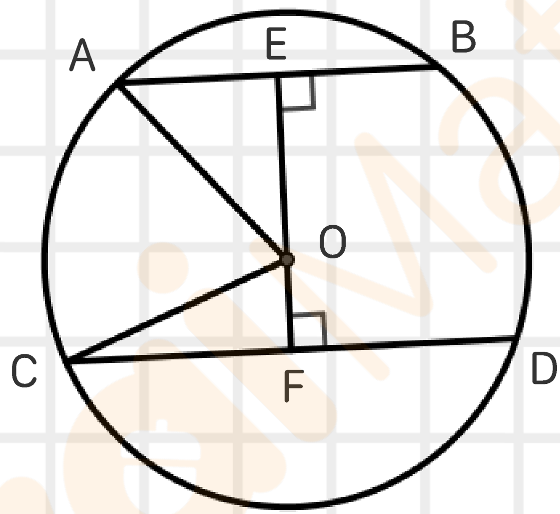
+) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

CleverMath

Bài mẫu:

Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40cm, 48cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

Bài giải:



Qua O, kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại E và cắt CD tại F.

Do AB // EF nên EF ⊥ CD.

Vậy EF là khoảng cách giữa AB và CD.

Do OE ⊥ AB, OF ⊥ CD nên E là trung điểm AB, F là trung điểm CD.

Suy ra AE = BE = $\frac{AB}{2}$ = 20 (cm)

và CF = DF = $\frac{CD}{2}$ = 24 (cm)

Xét tam giác AEO vuông tại E, có:

$AO^2 = AE^2 + EO^2 \Rightarrow EO^2 = AO^2 - AE^2$

$= 25^2 - 20^2 = 225$

$\Rightarrow EO = 15$ (cm)

Xét tam giác CFO vuông tại F, có:

$CO^2 = CF^2 + FO^2 \Rightarrow FO^2 = CO^2 - CF^2$

$= 25^2 - 24^2 = 49$

$\Rightarrow FO = 7$ (cm)

$\Rightarrow EF = EO + FO = 15 + 7 = 22$ (cm)

Vậy khoảng cách giữa hai dây là 22cm.

CleverMath

Vận dụng:

Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, dây AB bằng 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho AI = 1cm.

Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB.

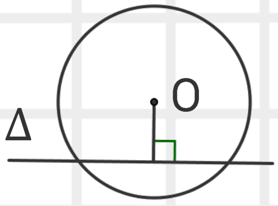
Chứng minh rằng CD = AB

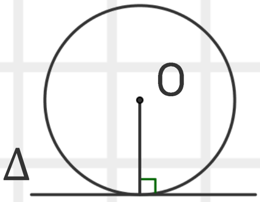
Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

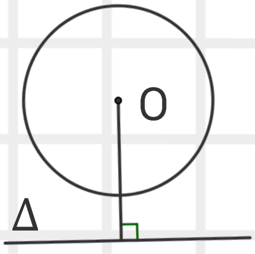
Kiến thức cần nhớ:

Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng Δ. Gọi d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ.

- Nếu d < R thì đường thẳng Δ và đường tròn có hai điểm chung.
- Nếu d = R thì đường thẳng Δ và đường tròn tiếp xúc với nhau (có một điểm chung). Khi đó đường thẳng Δ gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung của đường thẳng và đường tròn gọi là **tiếp điểm**.
- Nếu d > R thì đường thẳng Δ và đường tròn không giao nhau.



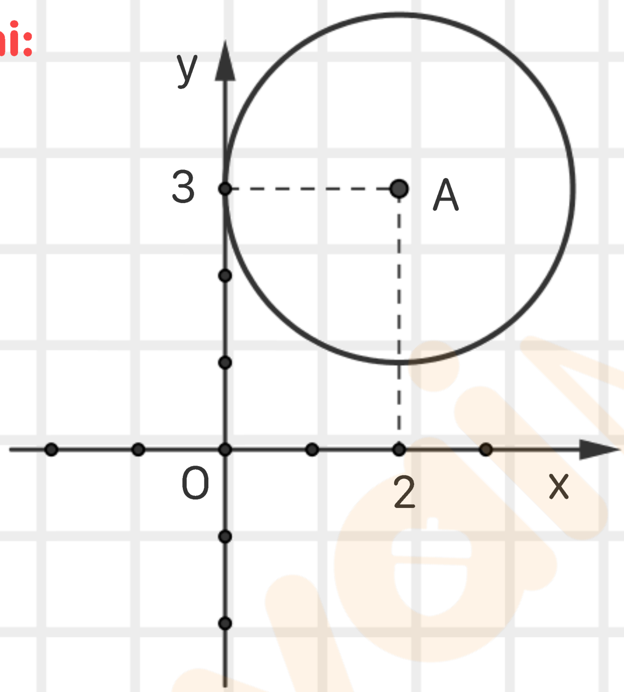




Bài mẫu:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 3). Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (A; 2) và các trục tọa độ.

Bài giải:



Ta có bán kinh của đường tròn R = 2

- Khoảng cách từ trục Ox đến đường tròn (A; 2) bằng 3 > R

Vậy trục Ox và đường tròn (A; 2) không giao nhau.

- Khoảng cách từ trục Oy đến đường tròn (A; 2) bằng 2 = R

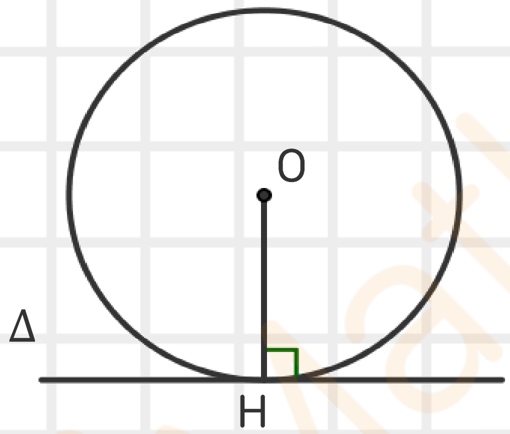
Vậy trục Oy tiếp xúc với đường tròn (A; 2).

Vận dụng:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm I(–1; 2). Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (I; 2) và các trục tọa độ.

Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Kiến thức cần nhớ:



- Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn.

Để nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn ta có hai dấu hiệu sau:

+ Dấu hiệu 1: Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung (định nghĩa tiếp tuyến).

+ Dấu hiệu 2: Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Cụ thể bằng các hiểu sau:

$$\begin{cases} H \in (O) \\ \Delta \perp OH \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow \Delta \text{ là tiếp tuyến của } (O)$$

- Tính chất của tiếp tuyến

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Trong hình vẽ Δ là tiếp tuyến $\Rightarrow \Delta \perp OH$

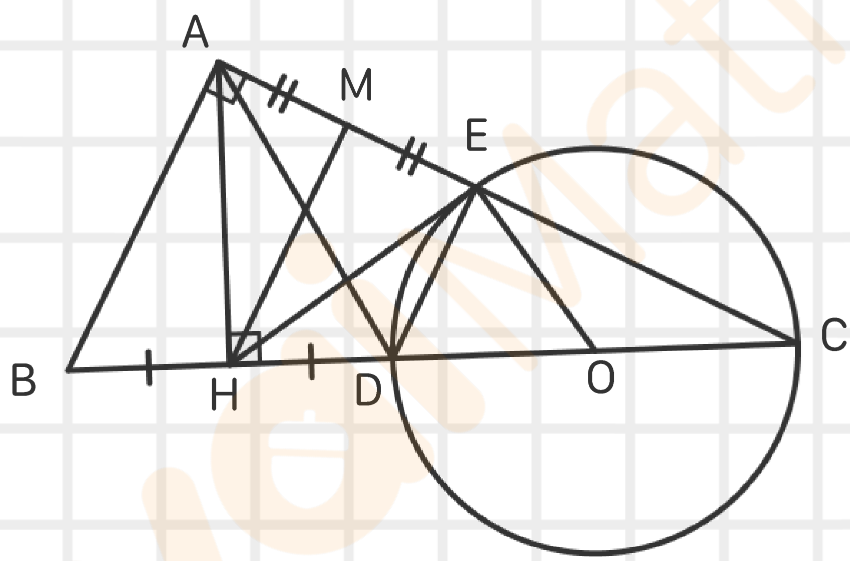
Bài mẫu:

Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 8, AC = 15. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài HE.

Bài giải:



a) Gọi M là trung điểm AE

Trong tam giác DEC ta có OE = CD = OC

Suy ra tam giác DEC vuông tại E.

$\Rightarrow$ AB // DE

Ta có H là trung điểm BD, M là trung điểm AE

$\Rightarrow$ HM là đường trung bình của hình thang ABDE.

$\Rightarrow HM \perp AE$

$\Rightarrow$ Tam giác AHE cân tại H

$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{AEH}$ (1)

Ta có tam giác DEO cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{ODE}$ (2)

Do DE // AB $\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{DBA}$

Mà $\widehat{HAE} = \widehat{DBA}$ (cùng phụ với góc BAH)

$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{ODE}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{OED}$

Ta có $\widehat{AEH} + \widehat{HED} = 90^o$

Suy ra $\widehat{OED} + \widehat{HED} = 90^o$

$\Rightarrow HE \perp EO$

$\Rightarrow$ Vậy HE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Ta có tam giác AHE cân tại H

$\Rightarrow HE = AH$

Xét tam giác ABC vuông tại A, có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{289}{14400}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{14400}{289} \Rightarrow AH = \frac{17}{120} \text{ (cm)}$$

Vậy $HE = \frac{17}{120}$ cm.

Vận dụng:

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^o$. Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho BM = R. Chứng minh rằng:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) $MC^2 = 3R^2$

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Kiến thức cần nhớ:

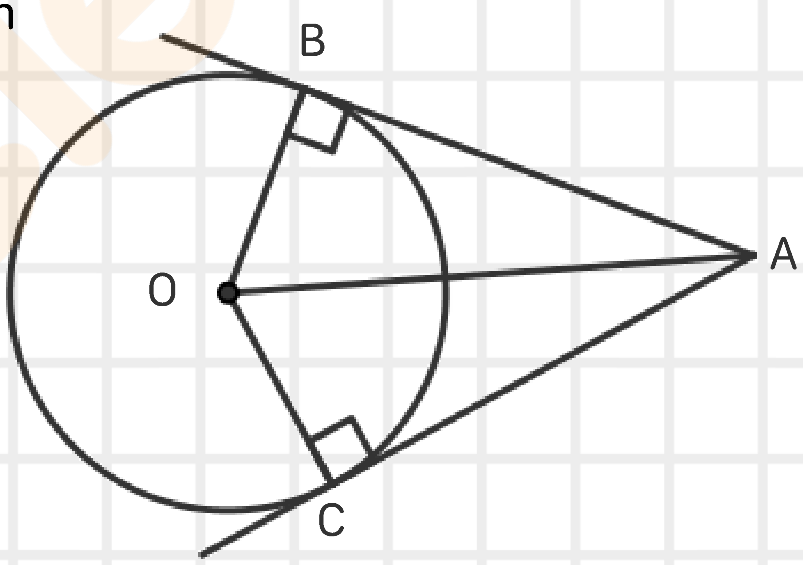
1. Định lý về hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

+ Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

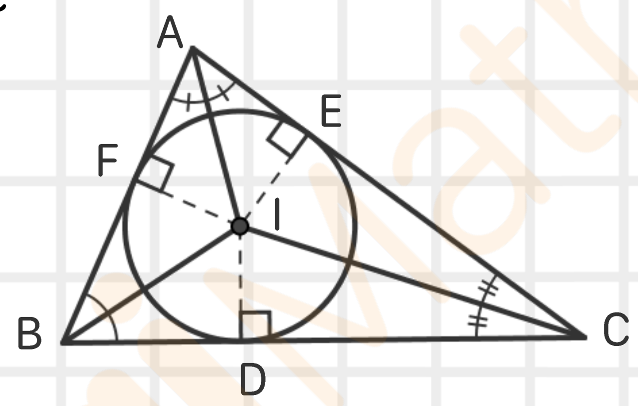
+ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm



2. Đường tròn nội tiếp của tam giác.

Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn, khi đó tam giác đó gọi là *tam giác ngoại tiếp* đường tròn.

Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác

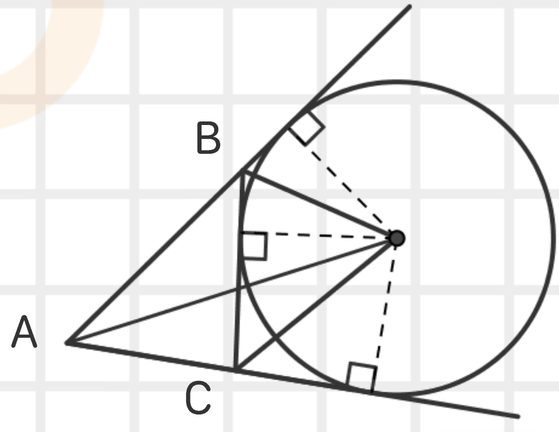


3. Đường tròn bàng tiếp tam giác.

Đường tròn bàng tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia.

Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, giao điểm này cùng nằm trên đường phân giác góc A.

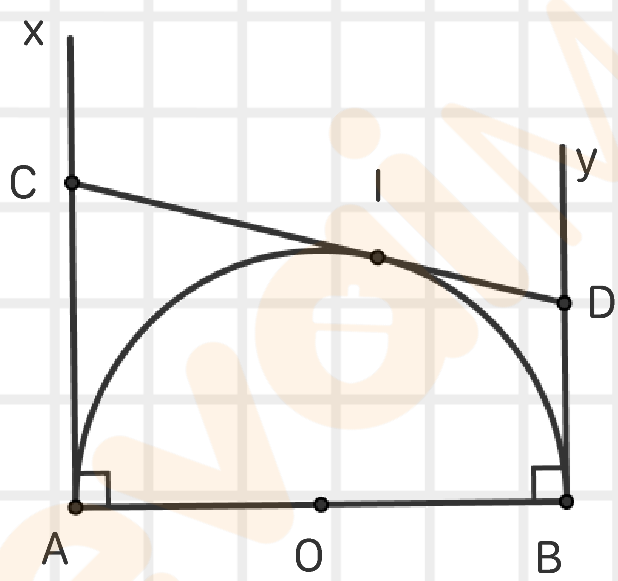
Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.



Bài mẫu:

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tia $Ax \perp AB$ và $By \perp AB$ ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt Ax tại C và By tại D. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

Bài giải:



Vì $Ax \perp AB$ và $By \perp AB$ nên Ax và By là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$AC = CI$ và $BD = ID$

$\Rightarrow AC + BD = CI + ID = CD$

Vậy $AC + BD = CD$.

Vận dụng:

Cho đường tròn (O; 5cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho: $MA \perp MB$ tại M.

a) Tính MA và MB.

b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB, vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D. Tính CD

CleverMath

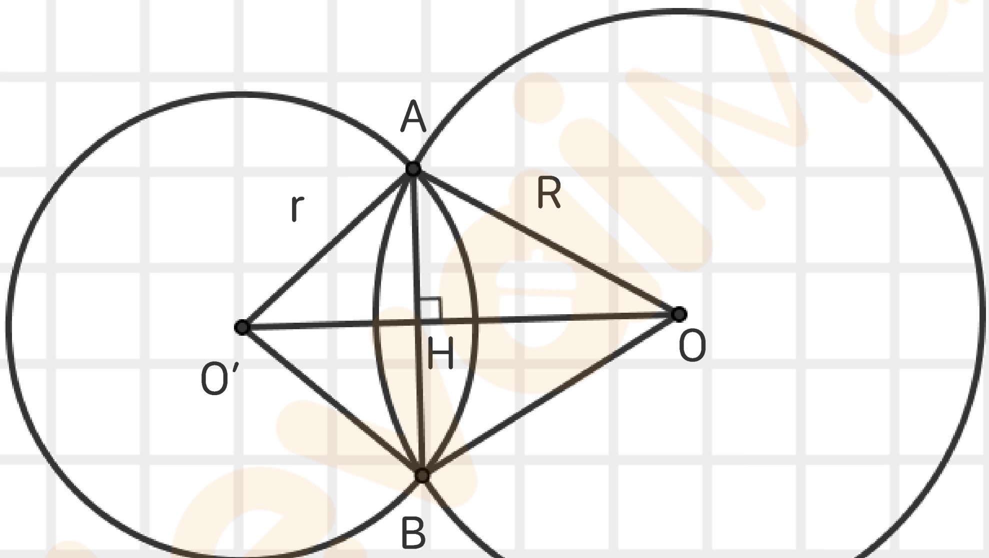
Vị trí tương đối của hai đường tròn

Kiến thức cần nhớ:

Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; r). Đặt OO′ = d.

Ba vị trí tương đối của hai đường tròn.

1. Hai đường tròn cắt nhau: $R - r < d < R + r$

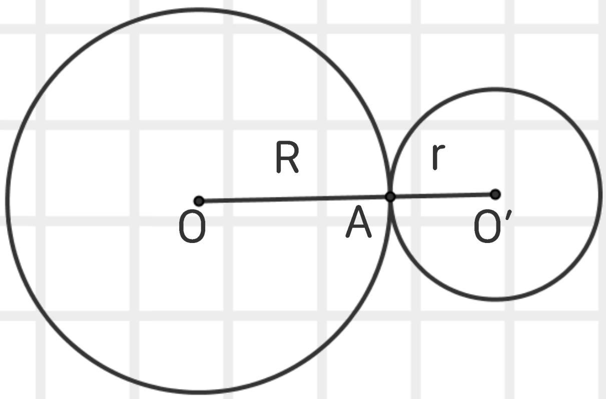


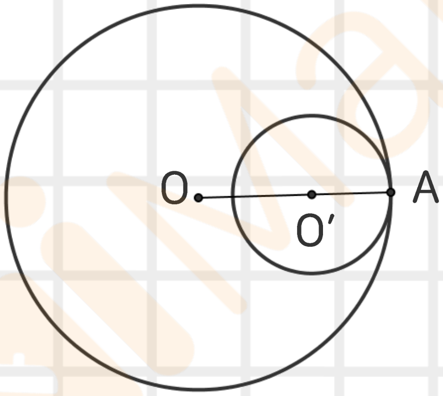
Hai đường tròn có hai điểm chung được gọi là hai đường tròn cắt nhau.

+ Đường thẳng OO′ là đường nối tâm, đoạn thẳng OO′ là đoạn nối tâm.

+ Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau.





Hai đường tròn chỉ có một điểm chung được gọi là hai đường tròn tiếp xúc.

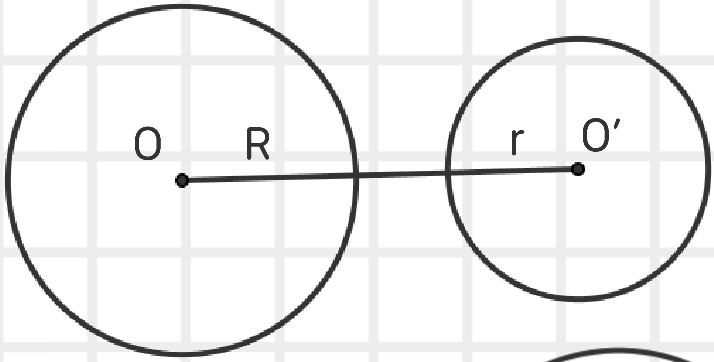
+ Điểm A gọi là tiếp điểm. Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

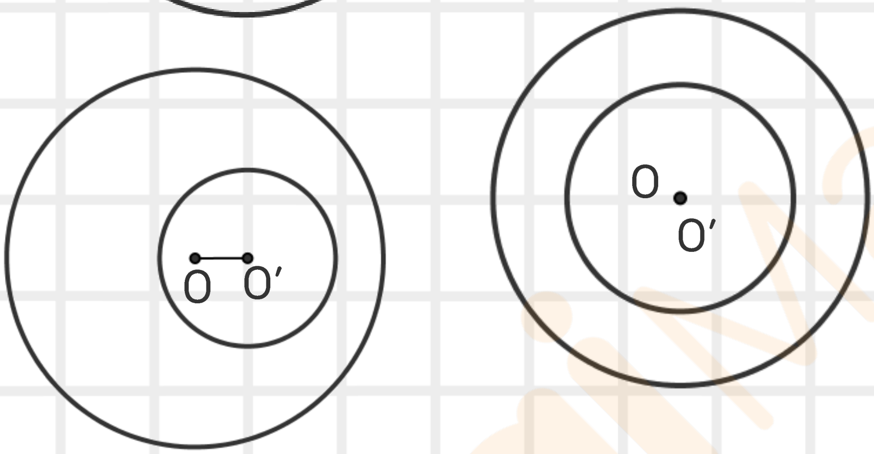
+ Có hai trường hợp tiếp xúc của hai đường tròn:

· Tiếp xúc ngoài tại A: $OO' = R + r$

· Tiếp xúc trong tại A: $OO' = R - r$

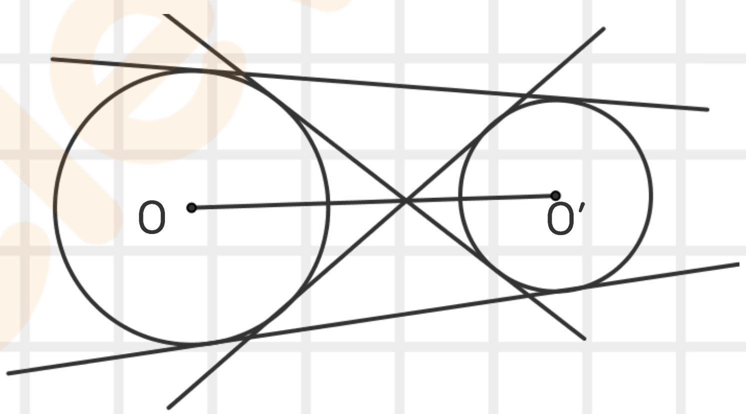
3. Hai đường tròn không giao nhau





Hai đường tròn không có điểm chung nào được gọi là hai đường tròn không giao nhau.

4. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn



+ Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
+ Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đường nối tâm.
+ Tiếp tuyến chung trong cắt đường nối tâm.

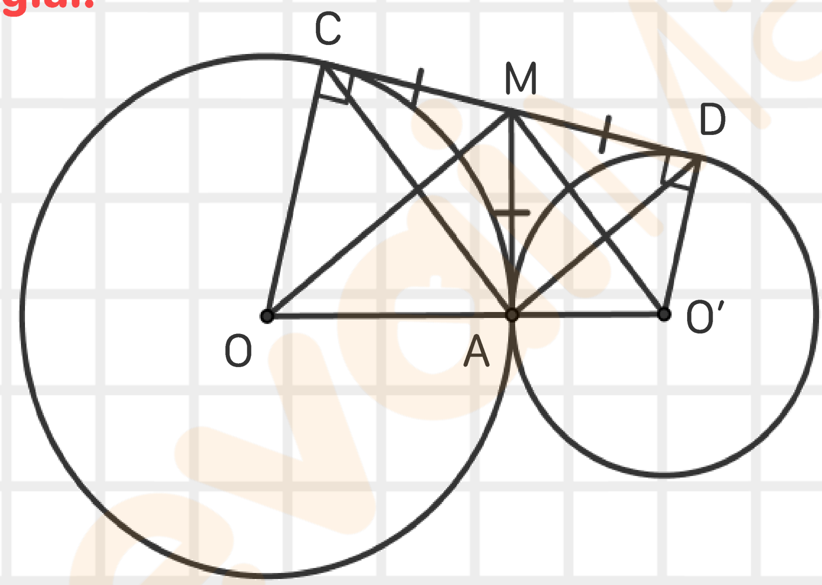
Bài mẫu:

Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($C \in (O)$, $D \in (O')$).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5cm, O′A = 2cm.

Bài giải:



a) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt CD tại M. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

MA = MC; MA = MD.

$\Rightarrow$ MA = MD = MC

Tam giác ACD có đường trung tuyến AM ứng với cạnh CD bằng nửa cạnh CD nên $\widehat{CAD} = 90^o$.

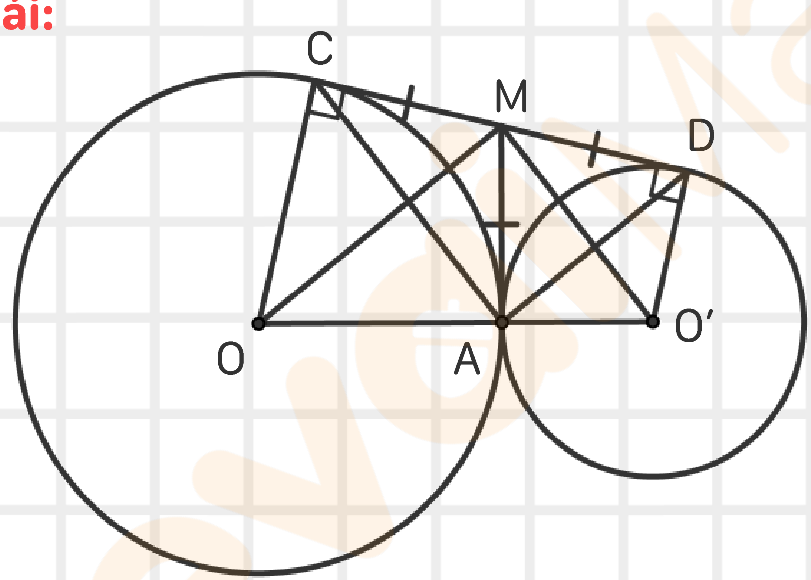
Bài mẫu:

Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($C \in (O)$, $D \in (O')$).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5cm, O′A = 2cm.

Bài giải:



b) MO và MO′ là các tia phân giác của hai góc kề bù AMC và AMD nên $\widehat{OMO'} = 90^o$.

Xét tam giác OMO′ vuông tại M, MA là đường cao nên $MA^2 = OA \cdot OA' = 4{,}5 \cdot 2 = 9$ (cm)

Suy ra MA = 3cm

Suy ra CD = 2 MA = 6 (cm).

Vận dụng:

Cho đường tròn (O; 3cm) và đường tròn (O′; 1cm) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OB, O′C song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO′.

a) Tính số đo góc BAC.

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO′.

Tính độ dài OI.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương trình bậc nhất hai ẩn

Kiến thức cần nhớ:

- Là phương trình dạng ax + by = c (1) với a, b không đồng thời bằng 0
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1) nếu $ax_0 + by_0 = c$
- Tập hợp các điểm biểu diễn nghiệm của (1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng

Bài mẫu:

Tìm m để điểm M(5 ; -3) thuộc đường thẳng

3x – my = 6

Bài giải:

Thay x = 5 ; y = -3 vào 3x – my = 6 ta được:

3 . 5 – m . (-3) = 6 ⇔ 15 + 3m = 6

⇔ 3m = -9 ⇔ m = -3

Vận dụng:

Tìm m để điểm M(-5 ; 3) thuộc đường thẳng

$5x - my = 2$

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Kiến thức cần nhớ:

- Là hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \ \ (d_1) \\ a'x + b'y = c \ \ (d_2) \end{cases} \text{(I)}$$

- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (I) nếu nó là nghiệm của cả hai phương trình, và cũng là tọa độ giao điểm của (d_1) với (d_2)
- (I) có nghiệm duy nhất nếu (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
- (I) có vô số nghiệm nếu (d_1) trùng $(d_2) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
- (I) vô nghiệm nếu (d_1) song song $(d_2) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Bài mẫu:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ mx + y = 2 \end{cases}$ (I)

Tìm m để hệ (I)

a) Có nghiệm duy nhất

b) Có vô số nghiệm

c) Vô nghiệm

Bài giải:

a) Hệ (I) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq -\frac{2}{1} \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

b) Hệ (I) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = -\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

c) Hệ (I) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = -\frac{2}{1} \neq -\frac{4}{2}$ (vô lý vì $-\frac{2}{1} = -\frac{4}{2}$).

Do đó không tồn tại m để hệ vô nghiệm

Vận dụng:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + my = 2 \end{cases}$ (I)

Tìm m để hệ (I)

a) Có nghiệm duy nhất

b) Có vô số nghiệm

c) Vô nghiệm

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Kiến thức cần nhớ:

Bước 1 . Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

Bài mẫu:

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-1}+2|y-2|=3\\ 3\sqrt{x-1}-2|y-2|=1\end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $a=\sqrt{x-1}$ $(a \geq 0)$; $b=|y-2|$ $(b \geq 0)$

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}a+2b=3\\ 3a-2b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3-2b\\ 3(3-2b)-2b=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=3-2b\\ 9-8b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3-2b\\ -8b=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3-2b\\ b=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\ (\text{tmđk})\\ b=1\ (\text{tmđk})\end{cases}$$

Với $a=1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x=2$ (tmđk)

Với $b=1 \Rightarrow |y-2|=1 \Rightarrow y=1 ; y=3$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(2 ; 1)$ và $(2 ; 3)$

Vận dụng:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2|y+1| = 3 \\ 3\sqrt{x-1} - 2|y-2| = 1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình bằng phương cộng đại số

Kiến thức cần nhớ:

Bước 1. Nhân hai vế của mỗi phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau

Bước 2. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 3. Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia)

Bài mẫu:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2|y-2| = 3 \\ 3\sqrt{x-1} - 2|y-2| = 1 \end{cases}$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $a = \sqrt{x-1}$ $(a \geq 0)$; $b = |y-2|$ $(b \geq 0)$

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6b = 9 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b = 8 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + 2.1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (tmđk)} \\ b = 1 \text{ (tmđk)} \end{cases}$$

Với $a = 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2$ (tmđk)

Với $b = 1 \Rightarrow |y-2| = 1 \Rightarrow y = 1 ; y = 3$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(2 ; 1)$ và $(2 ; 3)$

Vận dụng:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2|y+1| = 3 \\ 3\sqrt{x-1} - 2|y-2| = 1 \end{cases}$

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Kiến thức cần nhớ:

- Bước 1. Lập hệ phương trình :

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;

- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;

- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- Bước 2. Giải hệ phương trình.

- Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Bài mẫu:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng hai lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 1 đơn vị, và nếu viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số cũ 27 đơn vị

Bài giải:

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x, chữ số hàng đơn vị là y. Điều kiện x và y là các số tự nhiên và $0 < x\,;\, y \le 9$.

Vì hai lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 1 đơn vị nên ta có phương trình:

$$2y - x = 1 \text{ hay } -x + 2y = 1 \ (1)$$

Nếu viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số cũ 27 đơn vị nên ta có phương trình:

$$(10x + y) - (10y + x) = 27 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x - y = 3 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số cần tìm là 74

Vận dụng:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng hai lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 4 đơn vị, và nếu viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số cũ 9 đơn vị.

HÀM SỐ

$y = ax^2 \ (a \neq 0)$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Hàm số $y = ax^2 \ (a \neq 0)$

Kiến thức cần nhớ:

- Nếu a > 0
  - ✓ Hàm số đồng biến khi x > 0, nghịch biến khi x < 0
  - ✓ Giá trị nhỏ nhất của hàm số là y = 0, khi x = 0
- Nếu a < 0
  - ✓ Hàm số đồng biến khi x < 0, nghịch biến khi x > 0
  - ✓ Giá trị lớn nhất của hàm số là y = 0, khi x = 0

Clevamath

Bài mẫu:

Biết rằng nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = 0{,}24RI^2t$. Trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng calo, R là điện trở tính bằng ôm, I là cường độ dòng điện tính bằng ampe, t là thời gian tính bằng giây.

Giả sử R = 10 và t = 1, hỏi cường độ dòng điện là bao nhiêu thì nhiệt lượng tỏa ra bằng 60 calo

Bài giải:

Với R = 100, t = 1 ta được Q = 0,24 . 10 . I^2. 1

Hay Q = 2,4 I^2

Với Q = 60 ta được 2,4I^2 = 60

Hay $I^2 = 25 \Leftrightarrow I = \pm 5$. Vì I > 0 nên I = 5

Vậy I = 5 (A)

Vận dụng:

Biết rằng nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = 0{,}24RI^2t$. Trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng calo, R là điện trở tính bằng ôm, I là cường độ dòng điện tính bằng ampe, t là thời gian tính bằng giây.

Giả sử R = 5 và t = 2, hỏi cường độ dòng điện là bao nhiêu thì nhiệt lượng tỏa ra bằng 38,4 calo

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Kiến thức cần nhớ:

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó gọi là một parabol với đỉnh O.

- Nếu a > 0 thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị
- Nếu a < 0 thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị

Bài mẫu:

Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng y = -2x + 3 tại điểm A có hoành độ bằng 1.

b) Vẽ đồ thị hàm y = -2x + 3 và đồ thị hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được trong câu a) trong cùng một mặt phẳng tọa độ

Bài giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm:

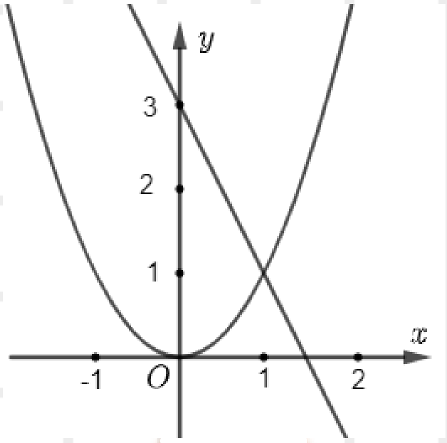
$$ax^2 = -2x + 3$$

Thay x = 1 vào ta được: a = -2 . 1 + 3

Suy ra: a = 1

b) Với a = 1 ta được hàm số $y = x^2$

Ta có đồ thị hàm $y = x^2$ và y = -2x + 3 như sau



Vận dụng:

Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng y = x + 2 tại điểm A có hoành độ bằng -1.

b) Vẽ đồ thị hàm y = x + 2 và đồ thị hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được trong câu a) trong cùng một mặt phẳng tọa độ

Phương trình bậc hai một ẩn

Kiến thức cần nhớ:

Là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$

Bài mẫu:

Giải phương trình: $x^2 + 8x = -2$

Bài giải:

$x^2 + 8x = -2$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = -2 + 16$

$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 14$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = \sqrt{14} \\ x + 4 = -\sqrt{14} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{14} - 4 \\ x = -\sqrt{14} - 4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm lần lượt là:

$x = \sqrt{14} - 4$ và $x = -\sqrt{14} - 4$

Vận dụng:

Giải phương trình: $x^2 - 8x = 3$

Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Kiến thức cần nhớ:

Phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Bài mẫu:

Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = 0$

Bài giải:

Ta có: $a = 1$; $b = 5$; $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.1.1 = 21 > 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Vận dụng:

Giải phương trình: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Công thức nghiệm thu gọn

Kiến thức cần nhớ:

Phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Xét $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Bài mẫu:

Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = 0$

Bài giải:

Ta có: $a = 1$; $b = 6 \Rightarrow b' = 3$; $c = 1$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 3^2 - 1.1 = 8 > 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{1} = -2 - \sqrt{8}$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{1} = -2 + \sqrt{8}$$

Vận dụng:

Giải phương trình: $2x^2 - 8x + 1 = 0$

CleverMath

Hệ thức Vi-et và ứng dụng

Kiến thức cần nhớ:

Nếu x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \, . \, x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

CleverMath

Bài mẫu:

Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

Bài giải:

Ta có: $\Delta' = 2^2 - (m - 1) = 5 - m$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5.$

Khi đó theo định lý Vi-et ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 . x_2 = m - 1 \end{cases}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{3}$

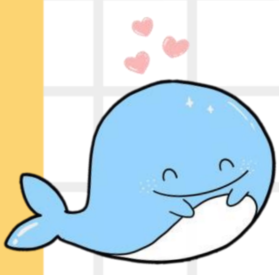
$\Leftrightarrow \dfrac{4}{m-1} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$ (tmđk)

Vậy $m = 4$

Vận dụng:

Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 . x_2} + 1$$



Phương trình quy về phương trình bậc hai

Kiến thức cần nhớ:

- Phương trình trùng phương

  $ax^4 + bx^2 + c = 0$

  ✓ Phương pháp: Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$ đưa về $at^2 + bt + c = 0$

- Phương trình chứa ẩn ở mẫu

  ✓ Phương pháp: Thực hiện chuyển vế, quy đồng, bỏ mẫu, rút gọn đưa về dạng phương trình bậc hai

Bài mẫu:

Giải phương trình: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Bài giải:

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$ ta được:

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$

Vì $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $t = -1$ (loại) và $t = 9$ (thỏa mãn)

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -3$; $x = 3$

CleverMath

Vận dụng:

Giải phương trình: $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Kiến thức cần nhớ:

- Bước 1. Lập phương trình :

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;

- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;

- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- Bước 2. Giải phương trình.

- Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rối kết luận.

CleverMath

Bài mẫu:

Một xưởng may phải may xong 3000 áo trong một thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may nhiều hơn 6 áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 5 ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 2650 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu áo?

Bài giải:

Gọi số áo phải may trong 1 ngày theo kế hoạch là: x ; $x \in \mathbb{N}^*$.

Thời gian quy định may xong 3000 áo là $\frac{3000}{x}$ ngày

Số áo thực tế may trong 1 ngày là $x + 6$ (áo)

Thời gian may xong 2650 áo là $\frac{2650}{x+6}$ ngày

Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{3000}{x} - 5 = \frac{2650}{x+6}$$

$\Leftrightarrow 3000(x+6) - 5x(x+6) = 2650x$

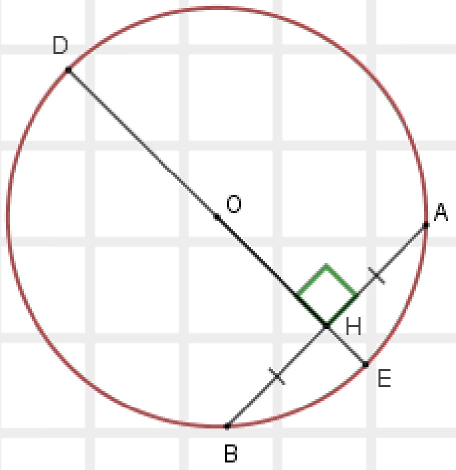
$\Leftrightarrow x^2 - 64x - 3600 = 0$

$\Leftrightarrow x = 100$ (tm) ; $x = -36$ (loại)

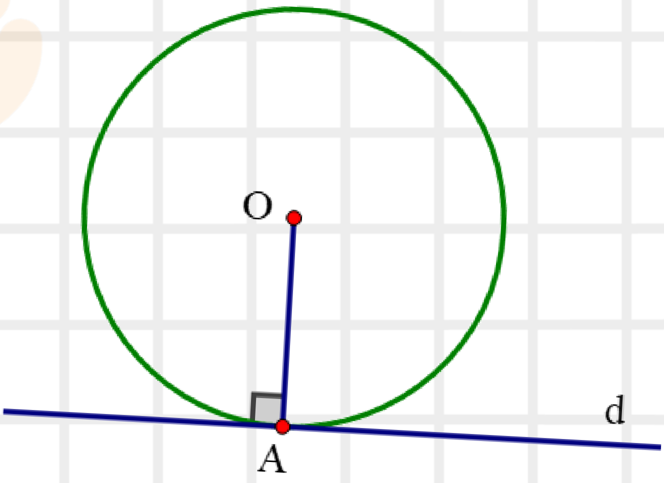
Vậy mỗi ngày xưởng phải may 100 áo

Vận dụng:

Một công ti vận tải dự định dùng loại xe lớn để chở 15 tấn rau theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ti không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe có trọng tải nhỏ hơn nửa tấn. Để đảm bảo thời gian đã hợp đồng công ti phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn?

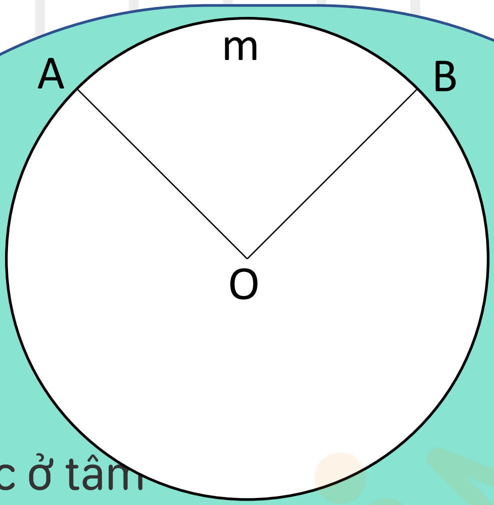


GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN



Góc ở tâm – Số đo cung

Kiến thức cần nhớ:



1. Góc ở tâm

- Góc AOB được gọi là góc ở tâm chắn cung nhỏ AmB (O là tâm đường tròn)

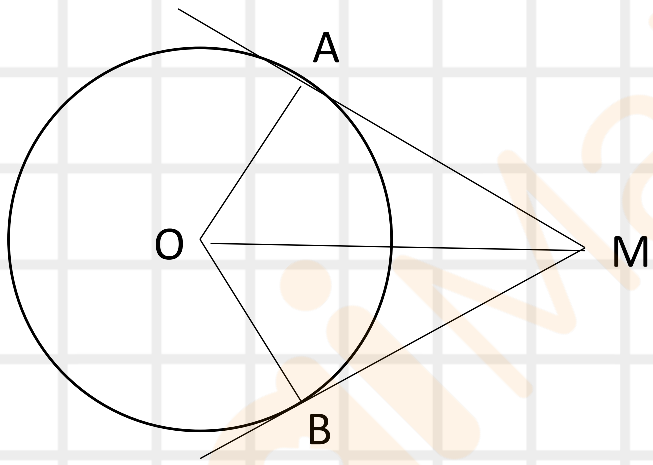
2. Số đo cung

- Số đo cung AmB = số đo góc AOB
- Số đo cung lớn AB bằng hiệu của 360^o và số đo AmB
- Số đo của nữa đường tròn bằng 180^o

Bài mẫu:

Hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O ; R) cắt nhau tại M. Biết OM = 2R. Tính số đo góc ở tâm AOB.

Bài giải:



Vì MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau nên OM là tia phân giác của góc OAB

Vì MA là tiếp tuyến nên MA vuông góc với OA, do đó tam giác OAM vuông tại A

Ta có: $\cos \widehat{AOM} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra: $\widehat{AOM} = 60^o$

Từ đó: $\widehat{AOB} = 120^o$

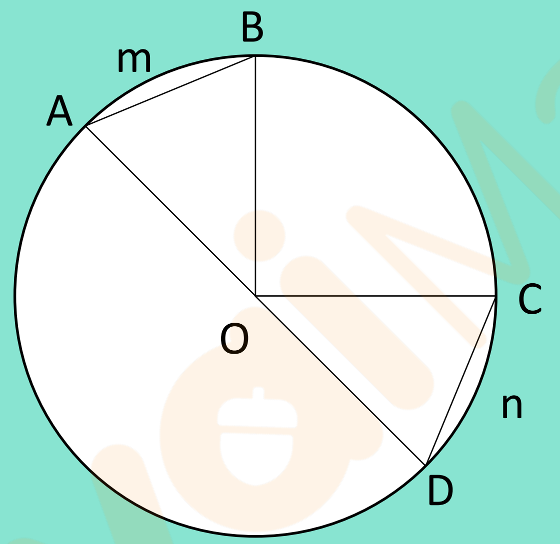
Vận dụng:

Hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O ; R) cắt nhau tại M. Biết OM = $\sqrt{2}$R. Tính số đo góc ở tâm AOB.

CleverMath

Liên hệ giữa dây và cung

Kiến thức cần nhớ:

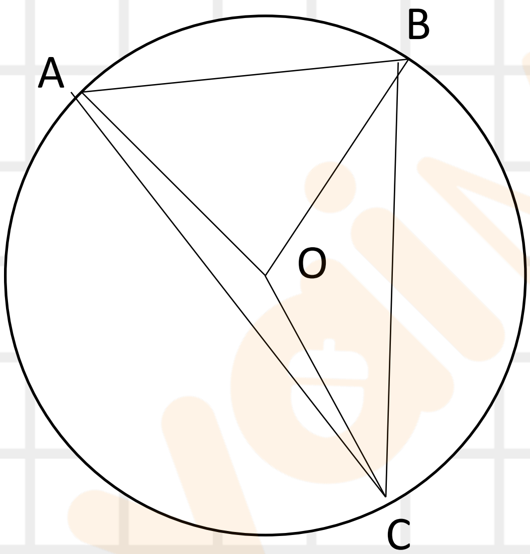


- $AB = CD \Leftrightarrow$ cung AmB = cung CnD
- $AB > CD \Leftrightarrow$ cung AmB > cung CnD

Bài mẫu:

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ góc AOB bằng 80^o, vẽ góc BOC bằng 120^o kề với góc AOB, với A, B, C thuộc đường tròn tâm O. So sánh AB, BC, CA

Bài giải:



Ta có:

$\overset{\frown}{AOC} = 360^o - \overset{\frown}{AOB} - \overset{\frown}{BOC} = 360^o - 80^o - 120^o$

$\overset{\frown}{AOC} = 160^o$

Vậy: $\overset{\frown}{AOB} < \overset{\frown}{BCO} < \overset{\frown}{AOC}$

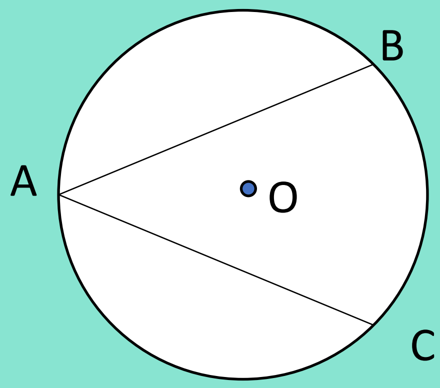
Suy ra: AB < BC < CA

Vận dụng:

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ góc AOB bằng 70^o, vẽ góc BOC bằng 140^o kề với góc AOB, với A, B, C thuộc đường tròn tâm O. So sánh AB, BC, CA

Góc nội tiếp

Kiến thức cần nhớ:

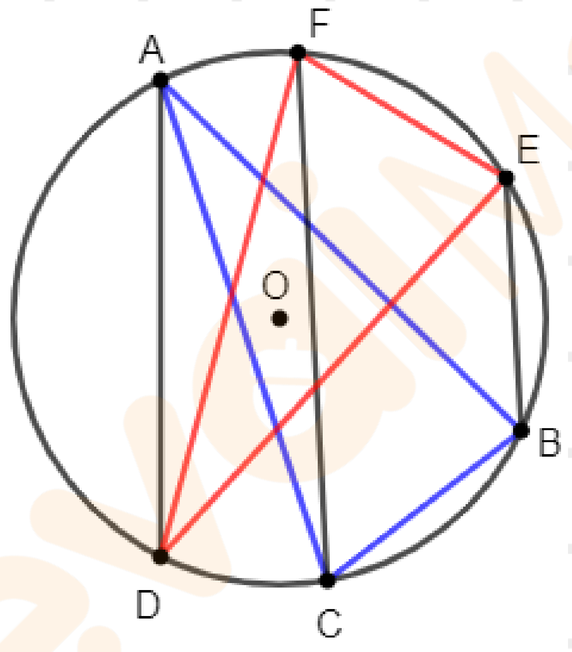


- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.
- Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài mẫu:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, biết $\widehat{A} = 32^o$; $\widehat{B} = 84^o$. Lấy các điểm D, E, F thuộc (O) sao cho AD = AB, BE = BC, CF = CA. Hãy tính các góc của tam giác DEF

Bài giải:



Theo giả thiết ta có:

sđ cung BC = sđ cung BE = 64^o

Sđ cung AB = sđ cung AD = 128^o

Sđ cung CA = sđ cung CF = 168^o

Do đó

Sđ cung EF = sđ cung CF – sđ cung CE = 40^o

Sđ cung AE = sđ cung AB – sđ cung BE = 64^o

Sđ cung DE = 360^o –sđ cung DA – sđ cung AE = 168^o

Từ đó:

$\widehat{FDE} = \frac{1}{2}$sđ cung EF = 20^o

$\widehat{DFE} = \frac{1}{2}$sđ cung DE = 84^o

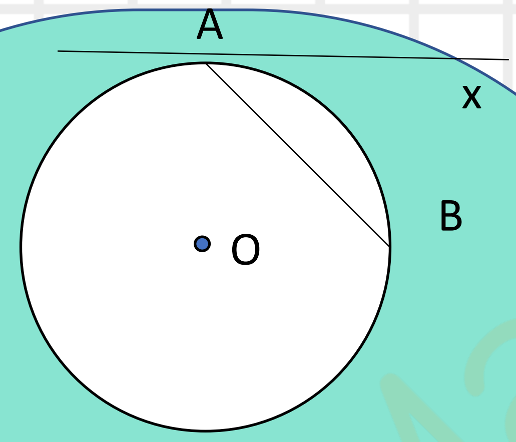
$\widehat{FED} = 180^o - 20^o - 84^o = 76^o$

Vận dụng:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, biết $\widehat{\mathrm{A}} = 34^{\mathrm{o}}$; $\widehat{\mathrm{B}} = 80^{\mathrm{o}}$. Lấy các điểm D, E, F thuộc (O) sao cho AD = AB, BE = BC, CF = CA. Hãy tính các góc của tam giác DEF

Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

Kiến thức cần nhớ:

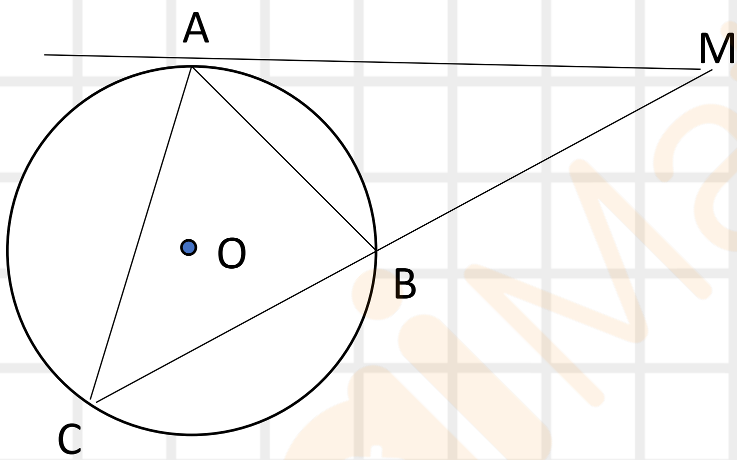


- Cho đường tròn tâm (O) có Ax là tia tiếp tuyến tại tiếp điểm A và dây cung AB. Khi đó, góc Bax là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.
- Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn
- Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau

Bài mẫu:

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Điểm M bất kì sao cho OM > R. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và cắt tuyến MBC. Chứng minh rằng MB . MC = MA^2

Bài giải:



Xét tam giác MAB và tam giác MCA có

Góc B chung

$\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn một cung)

Từ đó suy ra tam giác MAB và tam giác MCA đồng dạng (g-g)

Suy ra: $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$

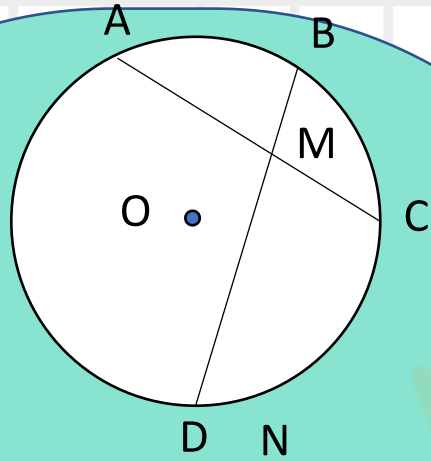
Hay $MB.MC = MA^2$

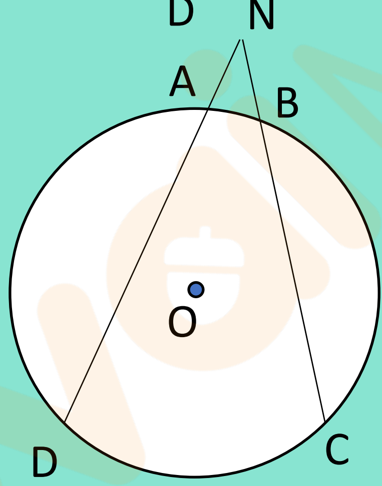
Vận dụng:

Cho đường tròn tâm O bán kính bằng 5. Điểm M bất kì sao cho OM = 8 cm. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và cắt tuyến MBC. Giả sử MB = 4 cm, MC = 10 cm. Tính MA

Góc có đỉnh bên trong, bên ngoài đường tròn

Kiến thức cần nhớ:

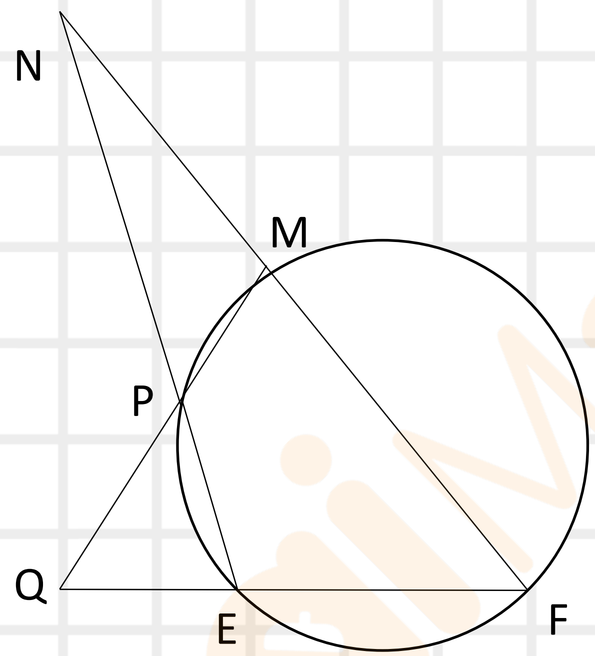




- Số đo của góc đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn
- Số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn

Bài mẫu:

Cho hình vẽ sau. Nếu góc N và Q có số đo lần lượt là 35^o và 50^o thì số đo góc E bằng bao nhiêu



Bài giải:

Ta có $\widehat{N}$= sđ cung EF – sđ cung PM

$\widehat{P}$ = sđ cung MF – sđ cung PE

Cộng vế với vế ta được

$\widehat{N}$ + $\widehat{P}$= sđ cung MFE – sđ cung MPE

sđ cung MFE – sđ cung MPE = $35^o + 50^o$

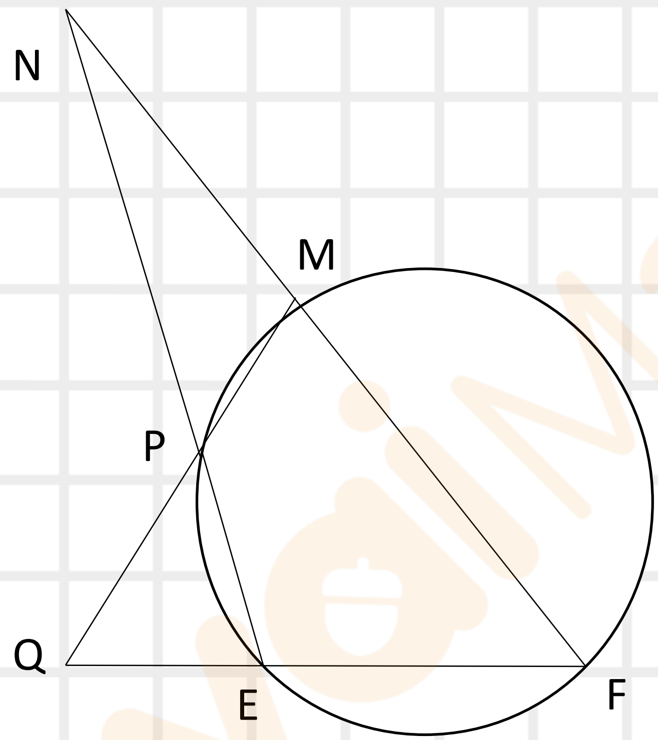
sđ cung MFE – sđ cung MPE = 85^o

Mà sđ cung MFE + sđ cung MPE = 180^o

Vậy sđ cung MPE = $47,5^o$, suy ra $\widehat{E}$ = $23,75^o$

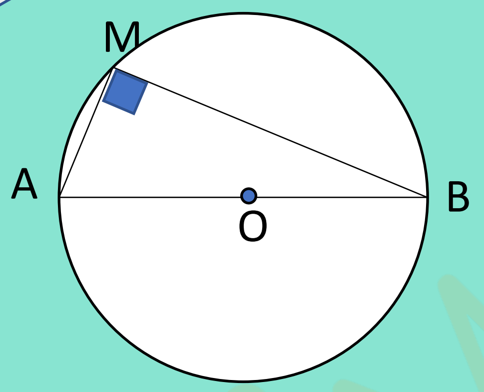
Vận dụng:

Cho hình vẽ sau. Nếu góc N và Q có số đo lần lượt là 45^{o} và 60^{o} thì số đo góc E bằng bao nhiêu



Cung chứa góc

Kiến thức cần nhớ:

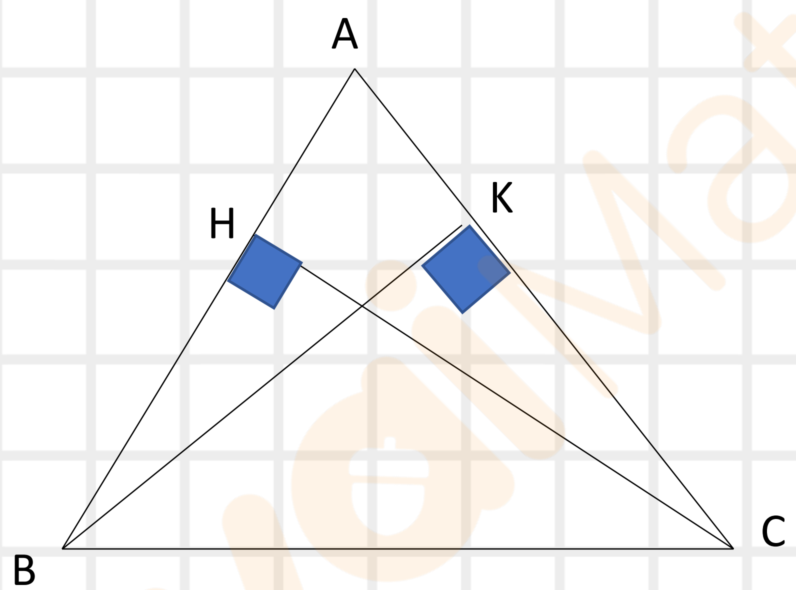


Tập hợp các điểm M nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là một đường tròn đường kính AB

Bài mẫu:

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao CH và BK. Chứng minh 4 điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài giải:



Ta có H và K cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông nên H, K thuộc đường tròn đường kính BC.

Vậy 4 điểm B, C, H, K thuộc đường tròn đường kính BC

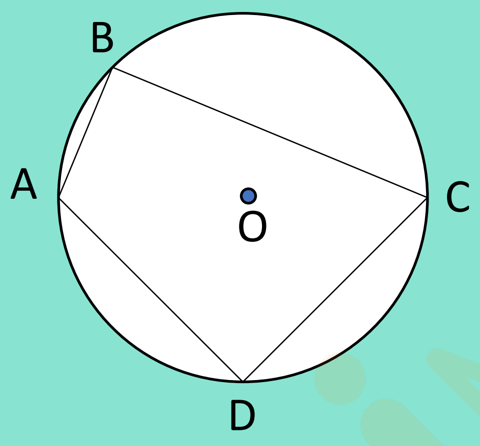
Vận dụng:

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao CM và BN cắt nhau tại H. Chứng minh 4 điểm A, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

CleverMath

Tứ giác nội tiếp

Kiến thức cần nhớ:

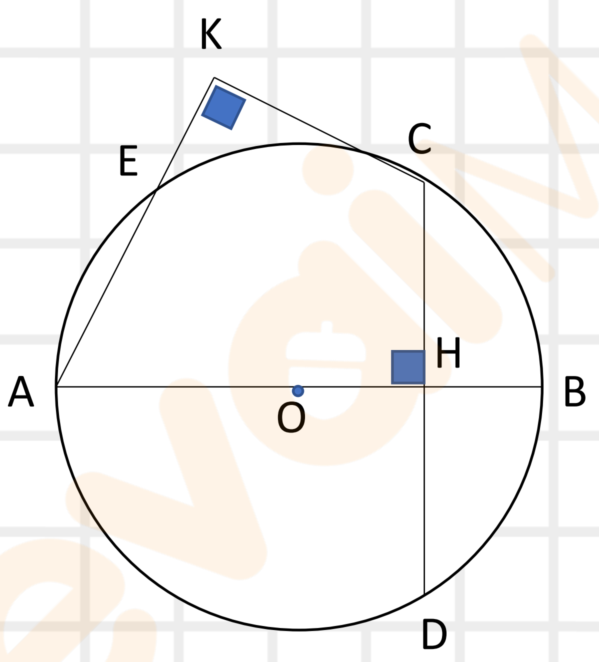


- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối bằng 180^o
- Nếu một tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^o thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn

Bài mẫu:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ CK vuông góc AE. Chứng minh tứ giác AHCK nội tiếp.

Bài giải:



Xét tứ giác AHCK có

$$\widehat{K} + \widehat{H} = 180^o$$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác AHCK nội tiếp

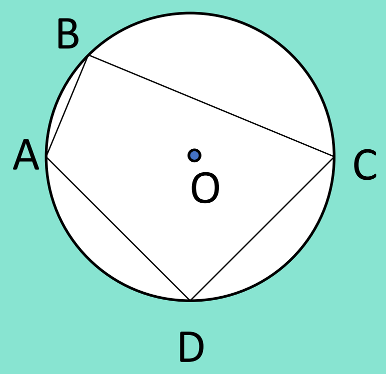
Vận dụng:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung nhỏ BC, AK cắt CD tại H. Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.

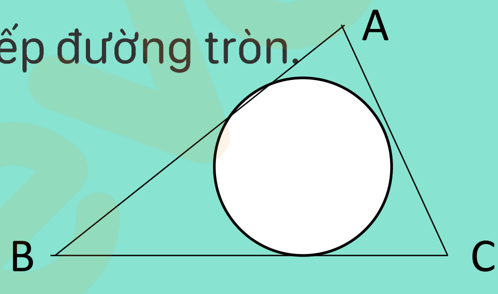
CleverMath

Đường tròn ngoại tiếp
Đường tròn nội tiếp

Kiến thức cần nhớ:



- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, và đa giác đó gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

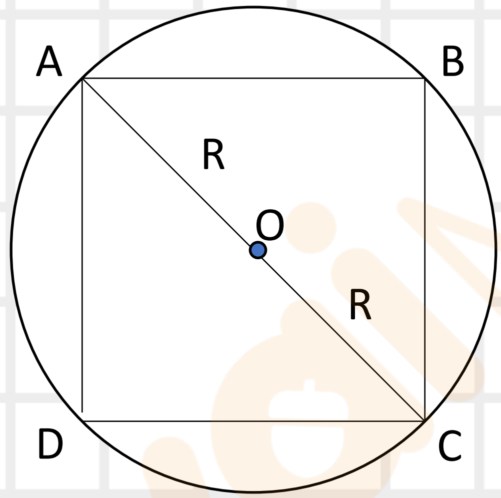


- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

Bài mẫu:

Tính độ dài cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R

Bài giải:



Giả sử hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R như hình bên

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông ADC có

$$AD^2 + CD^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2AD^2 = (2R)^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = 2R^2 \Leftrightarrow AD = \sqrt{2} \,.\, R$$

Vậy độ dài cạnh hình vuông là: $\sqrt{2} \,.\, R$

Vận dụng:

Tính độ dài cạnh hình vuông ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính R

Độ dài đường tròn, cung tròn

Kiến thức cần nhớ:

- Cho đường tròn (O ; R), độ dài (C) của đường tròn (hay chu vi của đường tròn) là:

$$C = 2\pi R.$$

- Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^o được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

CleverMath

Bài mẫu:

Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2dm

Bài giải:

Ta có: $l = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi . 2 . 60}{180} = \dfrac{2\pi}{3}$

Vận dụng:

Tính độ dài cung 45° của một đường tròn có bán kính 3dm

CleverMath

Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

Kiến thức cần nhớ:

- Công thức tính diện tích hình tròn:

$$S = \pi R^2$$

- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n° được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{l . R}{2}$$

(với l là độ dài cung n°)

Bài mẫu:

Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 6cm, số đo cung là 36°.

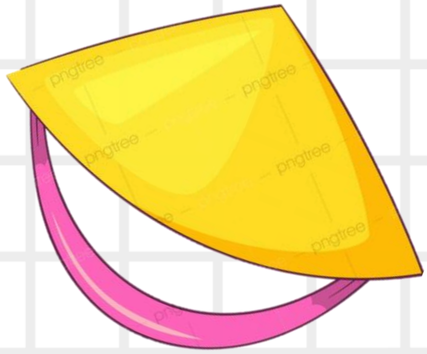
Bài giải:

Ta có diện tích hình quạt là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi . 6^2 . 36}{360} = \frac{18\pi}{5}$$

Vận dụng:

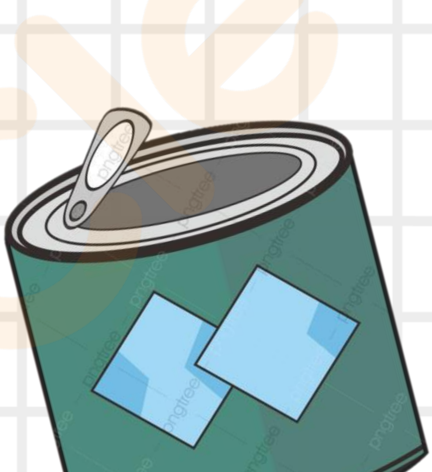
Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 7cm, số đo cung là 72°.



HÌNH TRỤ

HÌNH NÓN

HÌNH CẦU



Hình trụ
Diện tích xung quanh
Thể tích hình trụ

Kiến thức cần nhớ:

Hình trụ có r là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao thì có:

- Diện tích xung quanh là:

$$S_{xq} = 2\pi rh$$

- Diện tích 2 đáy là:

$$S_{2\text{ đáy}} = 2\pi r^2$$

- Diện tích toàn phần là:

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

- Thể tích hình trụ:

$$V = \pi r^2 h$$

Bài mẫu:

Một hình trụ có bán kính đáy là 7cm, diện tích xung quanh bằng $352\,\mathrm{cm}^2$. Khi đó, chiều cao của hình trụ bằng bao nhiêu?

Bài giải:

Ta có: $S_{xq} = 2\pi rh = 352$

Suy ra: $h = \dfrac{352}{2\pi r} = 8$ cm

Vận dụng:

Một hình trụ có bán kính đáy là 6cm, diện tích xung quanh bằng $345cm^2$. Khi đó, chiều cao của hình trụ bằng bao nhiêu?

CleverMath

Hình nón, hình nón cụt
Diện tích xung quanh
Thể tích hình nón, hình nón cụt

Kiến thức cần nhớ:

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$
- Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$
- Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Diện tích xung quanh nón cụt là: $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2).l$
- THể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_1 r_2)$

Bài mẫu:

Phần trên của cối xay gió có dạng một hình nón (hình vẽ). Chiều cao của hình nón là 42cm và thể tích của nó là $17600 cm^3$. Em hãy giúp chàng Đôn-ki-hô-tê tính bán kính của đáy hình nón (làm tròn đến kết quả chữ số thập phân thứ nhất)

Bài giải:

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nên $\frac{1}{3}\pi r^2 . 42 = 17600$

Suy ra $r^2 = \frac{3 . 17600}{42} = \frac{8800}{7}$

Từ đó r = 35,5

Vậy $S_{đáy} = \pi r^2 = 3949 cm^2$

Vận dụng:

Phần trên của cối xay gió có dạng một hình nón (hình vẽ). Chiều cao của hình nón là 45cm và thể tích của nó là 18500cm^3. Em hãy giúp chàng Đôn-ki-hô-tê tính bán kính của đáy hình nón (làm tròn đến kết quả chữ số thập phân thứ nhất)

Hình cầu

Diện tích mặt cầu

Thể tích hình cầu

Kiến thức cần nhớ:

- Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2$$

- Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

R là bán kính, d là đường kính mặt cầu.

Bài mẫu:

Một hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $64\pi\ (cm^2)$. Thể tích hình cầu đó bằng bao nhiêu?

Bài giải:

Ta có: $S = 4\pi R^2$

Mà $S = 64\pi$ nên $4\pi R^2 = 64\pi$

Suy ra $R = 4$

Từ đó $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\, 4^3 = \frac{256}{3}\pi\ (cm^3)$

Vận dụng:

Một hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. Thể tích hình cầu đó bằng bao nhiêu?

CleverMath

WELL DONE

CLEVAI CHÚC EM HỌC TỐT